

FORTSCHRITTE DER PHYSIK

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

IN DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK

VON FRIEDRICH MÖGLICH · RUDOLF RITSCHL · ROBERT ROMPE

BAND 1 · HEFT 2 · 1953

A K A D E M I E - V E R L A G · B E R L I N

I N H A L T

	Seite
Einige Probleme aus der Theorie der elektrischen Schwingungserscheinungen. Von W. L. GINSBURG	51-87
Über die jüngste Entwicklung der klassischen Elektrodynamik. Von L. INFELD	88-98

In den nächsten Heften erscheinen u. a. Beiträge von I. RAYSKI,
G. LEIBFRIED und W. BRENIG sowie Übersetzungen aus den Uspechi
Fiz. Nauk (W. L. GINSBURG)

FORTSCHRITTE DER PHYSIK

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

IN DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK

VON FRIEDRICH MÖGLICH · RUDOLF RITSCHL · ROBERT ROMPE

BAND 1 · HEFT 2 · 1953

K A D E M I E · V E R L A G · B E R L I N

Einige Probleme aus der Theorie der elektrischen Schwankungserscheinungen

W. L. GINSBURG¹⁾

Einleitung

Die elektrischen Schwankungserscheinungen besitzen bekanntlich große wissenschaftliche und praktische Bedeutung und können bis heute nicht als allseitig erforscht angesehen werden. Daher ist verständlich, daß die Theorie der elektrischen Schwankungserscheinungen noch heute starke Beachtung findet, die sich auch auf einen so grundlegenden Satz wie die NYQUISTsche Formel bezieht. In letzter Zeit beschäftigte sich der Verfasser mit drei hierher gehörigen Fragen, nämlich dem Problem der Besonderheiten elektrischer Schwankungserscheinungen in der Nähe von Phasenumwandlungspunkten zweiter Ordnung (CURIE-Punkten), dem Problem der Anwendung thermodynamischer Methoden auf die elektrischen Schwankungserscheinungen und schließlich der quantentheoretischen Verallgemeinerung der Formel von NYQUIST. Alle diese Fragen sind von einiger Bedeutung, und ihre Klärung kann, wie uns scheint, bis zu einem gewissen Grade gelingen. Diesen drei Problemen ist auch der vorliegende Artikel gewidmet, der in der Hauptsache methodischen Charakter trägt. Aus diesem Grund war der Verfasser bestrebt, eine allzu große Knappheit der Darstellung zu vermeiden.

1. Die klassische NYQUIST-Formel

Für unsere weiteren Darlegungen müssen wir uns zunächst mit der Definition der Grundgrößen beschäftigen, die in der Theorie der elektrischen Schwankungserscheinungen auftreten, ferner mit der Ableitung der NYQUISTschen Formel. Hierbei handelt es sich zunächst um die wohlbekannte Form der Formel von NYQUIST, die nur bei Vernachlässigung von Quanteneffekten gilt. Die thermische Bewegung in einem beliebigen elektrischen Schwingungskreis hat zur Folge, daß auch bei Abwesenheit einer äußeren Spannung im Kreis ein Strom $I(t)$ fließt. Der Momentanwert dieses Stroms ändert sich schnell, sowohl seiner Größe, als auch seiner Richtung nach; von Bedeutung ist also nicht die Größe $I(t)$, sondern ihr quadratischer Mittelwert \bar{I}^2 und dessen spektrale Dichte $|I_\omega|^2$, die durch die Beziehungen

$$1,1) \quad \bar{I}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt = 4\pi \int_0^\infty |I_\omega|^2 d\omega,$$

¹⁾ Aus Uspechi Fiz. Nauk **46**, 348 (1952).

Zeitschrift „Fortschritte der Physik“

$$(1,2) \quad |I_\omega|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 T} \left| \int_0^T I(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

definiert sind.

Man definiert die Größe $|I_\omega|^2$ als Grenzwert, weil sich $I(t)$ nicht in ein FOURIER Integral entwickeln läßt [Näheres siehe zum Beispiel LANDAU-LIFSHIZ, § 117, wo die Definition der Größen vom Typ $|I_\omega|^2$ sich von (1,2) durch den Faktor $4\pi^2$ unterscheidet].

In einer Anzahl von Fällen erweist es sich als bequem, die Dichte $|I_\omega|^2$ nicht unmittelbar zu definieren, sondern sie durch die Dichte $|\mathcal{E}_\omega|^2$ einer schwankenden elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}(t)$ auszudrücken:

$$(1,3) \quad \left\{ \begin{aligned} |\mathcal{E}_\omega|^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 T} \left| \int_0^T \mathcal{E}(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2, \\ \overline{\mathcal{E}^2} &= 4\pi \int_0^\infty |\mathcal{E}_\omega|^2 d\omega = \int_0^\infty w(\omega) d\omega = \int_0^\infty w(\nu) d\nu, \\ w(\omega) &= \frac{w(\nu)}{2\pi} = 4\pi |\mathcal{E}_\omega|^2, \end{aligned} \right.$$

wobei die Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ eingeführt wurde, weil sie in der Praxis bei der Behandlung der uns beschäftigenden Probleme häufiger benutzt wird als ω . Die fluktuierende Spannung $\mathcal{E}(t)$ ist ihrer Definition nach die Spannung, die notwendig ist, um im Schwingungskreis den fluktuierenden Strom $I(t)$ zu erzeugen. Im Rahmen der quasistationären Näherung, auf die wir uns beschränken, unterscheidet sich aber der Strom $I(t)$ nicht wesentlich von einem Strom, der im Schwingungskreis unter dem Einfluß irgendeiner äußeren Spannung entsteht. Ist also, wie wir voraussetzen wollen, das System (des Schwingungskreis) linear, das heißt, ist der Strom in Anwesenheit einer

Spannung $\mathcal{E}(\omega)$, die sich nach einem $e^{i\omega t}$ -Gesetz ändert, $I(\omega) = \frac{\mathcal{E}(\omega)}{Z(\omega)}$, so besteht eine analoge Beziehung zwischen \mathcal{E}_ω und I_ω :

$$(1,4) \quad |I_\omega|^2 = \frac{|\mathcal{E}_\omega|^2}{|Z_\omega|^2} = \frac{4\pi w(\omega)}{|Z(\omega)|^2}.$$

Im einfachsten Fall, wenn das betrachtete System ein Schwingungskreis mit dem Widerstand R , der Kapazität C und der Selbstinduktion L ist, beträgt die Impedanz $Z = R + i(L\omega - 1/\omega C)$ (später wird häufig von einem solchen Schwingungskreis die Rede sein). Im allgemeinen Fall dagegen haben wir unter R den Realteil von Z zu verstehen. Interessieren wir uns nicht für den Strom I , sondern für die Ladung des Kondensators, den der Kreis enthält, so haben wir in dem behandelten quasistationären Fall

$$(1,5) \quad |q_\omega|^2 = \frac{|I_\omega|^2}{\omega^2}, \quad \overline{q^2} = 4\pi \int_0^\infty |q_\omega|^2 d\omega,$$

wobei \bar{q}^2 das mittlere Quadrat der Ladung des Kondensators ist. Die Impedanz $Z(\omega)$ des Systems kann man als bekannt ansehen, auf jeden Fall aber ist ihre Bestimmung ohne Einfluß auf das Problem der Schwingungserscheinungen. Wie aus (1,4) und (1,5) hervorgeht, läßt sich also unser Problem in linearen Systemen auf die Bestimmung der Funktion $w(\omega)$ zurückführen.

Die spektrale Dichte der fluktuierenden Spannung $w(\omega)$ wird bestimmt durch den Charakter der thermischen Bewegung im System und läßt sich natürlich im allgemeinsten Fall nicht festlegen. In dem wichtigsten Spezialfall, in dem sich das System im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, läßt sich die Funktion $w(\omega)$ jedoch bestimmen [NYQUIST (1928)]¹⁾. Zu diesem Zweck beschäftigen wir uns zunächst mit einer allgemeinen Eigenschaft der Funktion $w(\omega)$ im Gleichgewichtszustand. Es zeigt sich nämlich, daß in diesem Fall die Größe $w(\omega)$ für ein System mit der Impedanz $Z(\omega)$ das Produkt von $R(\omega) = \operatorname{Re} Z$ mit einer gewissen universellen (d. h. nicht von den Eigenschaften des Schwingungskreises abhängigen) Funktion der Frequenz ω und der Temperatur des Systems T darstellt:

$$(1,6) \quad w(\omega) = R(\omega) \cdot f(\omega, T).$$

Zum Beweis der Formel (1,6) betrachten wir einen geschlossenen Kreis, der aus zwei Zweipolen besteht, die sich in einem Thermostaten der Temperatur T befinden. Im Zustand thermodynamischen Gleichgewichts ist die mittlere Leistung P_{12} , die der erste Zweipol an den zweiten abgibt, gleich der mittleren Leistung P_{21} , die der zweite Zweipol an den ersten abgibt. Andererseits ist etwa die mittlere Leistung $P_{12} = \overline{I_1(t) V_1(t)}$, wobei der Querstrich Mittelung über die Zeit bedeutet, I_1 der Strom im Kreis ist, den die fluktuierende Spannung \mathcal{E}_1 im ersten Zweipol erzeugt, und V_1 die diesem Strom entsprechende Potentialdifferenz im zweiten Zweipol. Wie man leicht sieht, ergibt sich also unter Benutzung der oben eingeführten Ausdrücke

$$(1,7) \quad P_{12} = \int_0^\infty \frac{R_2 w_1(\omega) d\omega}{|Z|^2}, \quad P_{21} = \int_0^\infty \frac{R_1 w_2(\omega) d\omega}{|Z|^2},$$

wobei Z_1 und Z_2 die Impedanzen der Zweipole 1 und 2 sind, $R_1 = \operatorname{Re} Z_1$, $R_2 = \operatorname{Re} Z_2$, $Z = Z_1 + Z_2$ die Impedanz des ganzen Kreises und w_1 und w_2 die spektralen Dichten der fluktuierenden Spannungen in den Zweipolen 1 bzw. 2 sind. Setzen wir die Ausdrücke für P_{12} und P_{21} gleich und berücksichtigen, daß diese Gleichung für beliebige Zweipole gelten muß, so kommen wir zu der Formel (1,6), das heißt zu der Schlußfolgerung, daß für beliebige Zweipole 1, 2, ... k gilt $w_1/R_1 = w_2/R_2 = \dots = w_k/R_k = f(\omega, T)$, wo f eine universelle Funktion von ω und T ist. Auf die Beziehung (1,6) stützt sich auch

) Selbstverständlich sind neben den Schwingungserscheinungen in linearen Systemen und bei thermodynamischem Gleichgewicht auch nichtlineare Systeme von Interesse, die sich nicht im Gleichgewicht befinden. Jedoch gibt es auf diesem Gebiet entweder noch gar keine allgemeinen Ergebnisse, oder sie sind zumindest dem Verfasser unbekannt geblieben (kurz nach Erscheinen dieses Aufsatzes wurden einige Arbeiten veröffentlicht, die den Schwingungserscheinungen in nichtlinearen Systemen gewidmet sind; siehe J. Appl., Phys. 22, 1143, 1153, 1211, 1951).

NYQUIST selbst in seiner Ableitung der Formel für $w(\omega)$ [NYQUIST (1928)] ausführlicher und sehr klar wird sie in § 4 des Artikels von G. S. GORELICH bewiesen.

Die Universalität der Funktion $f(\omega, T)$ erlaubt uns, zu ihrer Bestimmung irgendein einfaches Modellsystem zu betrachten. NYQUIST behandelte zu diesem Zwecke ein Zweileitersystem. Manchmal verwendet man als Modellsystem eine Antenne, die sich in einem thermischen Strahlungsfeld befindet. Unserer Ansicht nach wählt man als Modellsystem am besten einen gewöhnlichen RCL -Schwingungskreis mit schwacher Dämpfung.

Die mittlere elektrische Energie \bar{U} in dem Kondensator des Schwingungskreises beträgt

$$(1,8) \quad \bar{U} = \frac{\bar{q}^2}{2C} = \frac{2\pi}{C} \int_0^\infty |q_\omega|^2 d\omega = \frac{2\pi}{C} \int_0^\infty \frac{|\mathcal{E}_\omega|^2 d\omega}{\omega^2 |Z(\omega)|^2} = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{C w(\omega) d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2}.$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht ist einerseits $w = R(\omega) f(\omega, T)$, andererseits ist im Rahmen der klassischen Theorie die mittlere Energie im Kondensator ganz analog der mittleren potentiellen Energie eines Oszillators gleich $kT/2$, wobei $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/Grad ist. Ferner ist für einen hinreichend schwach gedämpften Schwingungskreis die Funktion

$$\frac{CR}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2},$$

die nach Einsetzen von (1,6) in (1,8) unter dem Integral steht, eine fast deltaartige Funktion mit dem Maximum bei $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (ω_0 ist die Eigenfrequenz des Schwingungskreises). Man kann also $R(\omega) = R(\omega_0)$ und $f = f(\omega_0, T)$ setzen, wodurch das Integral den Wert $\pi/4$ erhält¹⁾. Wir

¹⁾ Mit Rücksicht auf das Folgende betonen wir, daß für jeden Wert des Parameters $\alpha = RC/\sqrt{LC}$ das Integral

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{RC d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\alpha d\eta}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

ist (hier ist $\eta = \sqrt{LC} \omega$). Statt die elektrische Energie $\bar{U} = \bar{q}^2/2C$ zu betrachten, kann man zur Bestimmung der Form der Funktion $f(\omega, T)$ auch die mittlere magnetische (kinetische) Energie berechnen:

$$\bar{K} = \frac{L \bar{I}^2}{2} = \frac{kT}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{C^2 L \omega^2 w(\omega) d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2}.$$

Das Integral

$$\frac{1}{2} \int \frac{C^2 L R \omega^2 d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\alpha \eta^2 d\eta}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2}$$

halten also $kT/2 = \pi f(\omega_0, T)/4$, und da die Frequenz ω_0 beliebig ist, $f(\omega, T) = 2kT/\pi$ und

$$(1,9) \quad w(\omega) = R(\omega) \cdot f(\omega, T) = \frac{2}{\pi} R(\omega) \cdot kT$$

oder

$$(1,9') \quad w(\nu) = 2\pi w(\omega) = 4R(\nu) \cdot kT.$$

Der Ausdruck (1,9) stellt die NYQUISTSche Formel dar, die also innerhalb der Gültigkeitsgrenzen der klassischen Theorie verwendbar ist. Deshalb werden wir die Formel (1,9), die bisher in der Praxis ausschließlich Verwendung fand, als klassische NYQUIST-Formel bezeichnen. Die Tatsache, daß die spektrale Dichte $w(\omega)$ der Spannung auch im thermodynamischen Gleichgewicht von dem Widerstand R abhängt, der die Dissipationsgeschwindigkeit der Energie des betrachteten Systems kennzeichnet, wenn es aus dem Gleichgewichtszustand entfernt wurde, ist physikalisch sehr plausibel. In der Tat: Entsteht etwa in einem Metall infolge einer Schwankung in der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen ein fluktuierender Strom, so wird, da sich dieser Strom nicht grundsätzlich von irgendeinem anderen Strom unterscheidet, seine Abklingdauer, die die Form der Funktionen $|I_\omega|^2$ und $w(\omega)$ bestimmt, wesentlich von dem Widerstand $R(\omega)$ abhängen.

Die betrachteten elektrischen Schwankungen entsprechen der BROWNSchen Bewegung der Teilchen in einem Gas oder einer Flüssigkeit. Insbesondere ist die Schwankung in einem Schwingungskreis, der durch die Gleichung

$$(1,10) \quad L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = \varepsilon,$$

beschrieben wird, ganz analog der BROWNSchen Bewegung eines Oszillators, für den

$$(1,11) \quad m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F$$

ist, wobei F eine „zufällige“ Kraft ist ($\overline{F} = 0$). Hieraus folgt, daß die für das elektrische System gewonnenen Ergebnisse sich ohne weiteres auf das mechanische System übertragen lassen und umgekehrt.

Im mechanischen Fall jedoch wird die thermodynamische Überlegung, die zu der wichtigen Formel (1,6) führte, gewöhnlich nicht angewandt, da sie hier zumindest gekünstelt erscheinen würde. Deshalb berechnet man die Größen, die $|I_\omega|^2$, $w(\omega)$ entsprechen, in der Theorie der BROWNSchen Bewegung auf andere Weise.

Ohne weiter auf die Theorie der BROWNSchen Bewegung einzugehen [Sammelband „Die BROWNSche Bewegung; UHLENBECK-ORNSTEIN; LEONTOWITSCH], führen wir hier unmittelbar die entsprechende Ableitung der NYQUISTSchen

ist ebenfalls für jeden Wert von α gleich $\pi/4$. Diese Integrale wertet man am einfachsten nach der Residuenmethode aus. Bei der Behandlung eines schwach gedämpften Schwingungskreises ergeben sich die Integrale, wie im Text angegeben, ebenfalls zu

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\alpha d\eta}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} \approx \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\alpha d\eta}{\alpha^2 + 4(\eta - 1)^2} \approx \frac{\pi}{4}.$$

Formel für das System (1,10) an. Hierzu setzen wir voraus, daß der Verlauf der fluktuierenden Spannung den Charakter zufälliger, momentaner und unabhängiger Stöße hat. In diesem Fall ist das Spektrum der Spannung $\mathcal{E}(t)$ kontinuierlich und unabhängig von der Frequenz [$\mathcal{E}(t)$ wird durch eine Summe von δ -Funktionen dargestellt; das Spektrum der δ -Funktion ist unabhängig von der Frequenz]. Es wird also angenommen, daß $w(\omega, R, T, \dots) = w(R, T, \dots)$ ist. Ferner sind die mittlere elektrische Energie \bar{U} und die mittlere magnetische Energie \bar{K} , die der mittleren potenziellen bzw. kinetischen Energie eines Oszillators entsprechen, einerseits gleich $kT/2$, andererseits hängen sie ab von der Funktion w :

$$(1,12) \quad \bar{U} = \frac{\bar{q}^2}{2C} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{Cw d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2} = \frac{kT}{2} = \bar{K} = \frac{L\bar{I}^2}{2} = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{LC^2 \omega^2 w d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}.$$

Ist die Funktion w frequenzunabhängig, so lassen sich unter der Voraussetzung, daß auch die Größen L, C, R frequenzunabhängig sind, die Integrale in (1,12) auswerten (vergleiche die Anmerkung auf Seite 30; zur Bestimmung von w genügt natürlich die Auswertung eines dieser Integrale); sie sind gleich $\pi w/4R = kT/2$, und daraus ergibt sich für w die NYQUISTSche Formel (1,9)¹⁾ Exakter erhält man die NYQUISTSche Formel mit $R = \text{const}$, während in (1,9) der Widerstand R von der Frequenz abhängen kann. Diese Einschränkung ist sehr wesentlich. Aus diesem Grunde wird man der ersten Ableitung der NYQUISTSchen Formel den Vorzug vor der zweiten geben.

Zum Schluß dieses Abschnitts machen wir noch eine Bemerkung. Unter Benutzung der NYQUISTSchen Formel (1,9) können wir mit Hilfe der Ausdrücke für \bar{U} und \bar{K} [siehe (1,12)] den Mittelwert für die elektrische (potentielle) und magnetische (kinetische) Energie des Schwingungskreises mit beliebigen frequenzunabhängigen Parametern L, C und R berechnen. Wir erhalten für sämtliche Werte dieser Parameter

$$(1,13) \quad \bar{U} = \bar{K} = \frac{kT}{2}.$$

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob diese Schlußfolgerung unmittelbar dem Satz der klassischen Statistik über die Gleichverteilung der Energie über die Freiheitsgrade entspreche [siehe zum Beispiel LEONTOWITSCH § 16 oder LANDAU-LIFSHIZ § 44]. Ganz so einfach liegen indessen die Dinge nicht. Es verhält sich so, daß die kanonische Verteilung für das „System im Thermostaten“, die zum Beweis des Gleichverteilungssatzes benutzt wird, allgemein

¹⁾ Wir weisen darauf hin, daß die in (1,12) benutzte Gleichung $\bar{U} = \bar{K} = kT/2$ für einen stark gedämpften Schwingungskreis durchaus nicht trivial ist, daß sie aber unter der Bedingung $R = \text{const}$ tatsächlich zutrifft (vergleiche den Schluß dieses Abschnittes und Abschnitt 3).

sagt, nur gültig ist, wenn das „System“ mit dem Thermostaten in schwacher Wechselwirkung steht, so daß man die entsprechende Wechselwirkungsenergie vernachlässigen kann. In unserem Fall wird das „System“ gekennzeichnet durch eine makroskopische Koordinate q oder x [siehe (1,10) und (1,11)], während seine Wechselwirkung mit dem Thermostaten durch den Widerstand R oder den Koeffizienten r bestimmt wird. Der Ausdruck „System“ ist in Anführungsstriche gesetzt, weil vorher in das System (ohne Anführungsstriche) auch der Thermostat einbegriffen wurde. Um Mißverständnisse zu vermeiden, werden wir unser „System“ als Untersystem bezeichnen, das heißt als makroskopischen Teil des Gesamtsystems, in dem sich die Energie nur infolge einer Wechselwirkung mit den übrigen Teilen des Systems ändert. Beispielsweise kann im Fall eines Pendels, das in einem Gas schwingt, als Koordinate x die von der Gleichgewichtslage aus gerechnete Koordinate des Schwerpunktes der Pendelmasse (von der Größe m) gewählt werden. Die Rolle des Thermostaten spielt hier das Gas, das das Pendel umgibt, die Wechselwirkung des Untersystems, der Pendelmasse, mit dem Thermostaten, dem Gas, wird dargestellt durch die Reibung, die auf den Stößen der Gasmoleküle gegen das Pendel beruht. Im Falle des Schwingungskreises sind die Untersysteme die Felder im Kondensator und in der Selbstinduktionsspule; die Rolle der Koordinate x spielt die Ladung q des Kondensators, als Thermostaten kann man das Leitermaterial ansehen, während der Widerstand zu einer Umwandlung elektromagnetischer Energie in thermische Bewegung im Leiter führt. Ist der Widerstand des Kreises so klein, daß sich seine Energie während einer Schwingung nur wenig ändert, das heißt, ist

$$(1,14) \quad \frac{R}{L} \ll \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0,$$

so lassen sich gegen eine Anwendung der Formeln der Statistik und damit gegen die Gleichung (1,13) keinerlei Einwände erheben¹⁾. Ist jedoch die Ungleichung (1,14) nicht erfüllt, ändert sich also die Energie des Untersystems während einer Periode stark, so ist die Möglichkeit einer Vernachlässigung der Wechselwirkungsenergie von vornherein durchaus nicht klar. Nimmt man zum Beispiel an, daß bei einer Änderung der Schwerpunktskoordinate des Pendels um eine Größe x die potentielle oder genauer die freie Energie des Pendels und des umgebenden Mediums bei beliebiger innerer Reibung sich nur um eine Größe $U = kx^2/2$ ändert, so machen wir eine zusätzliche Voraussetzung: das gleiche gilt für den elektrischen Fall. Die Voraussetzung, von der die Rede ist, bedeutet insbesondere, daß das Untersystem als solches, unabhängig von der Größe der Dämpfung, das heißt unabhängig von der Übertragungsgeschwindigkeit der Energie vom Untersystem auf den Thermostat, im wesentlichen unverändert bleibt.

Die Benutzung der Beziehung

$$\bar{U} = \bar{q}^2/2C = kT/2 \quad \text{oder} \quad \bar{K} = L\bar{I}^2/2 = kT/2$$

bei der Ableitung der Formel (1,9) ist also für den schwach gedämpften Schwingungskreis durchaus gerechtfertigt.

Im Rahmen der klassischen Theorie ist die Vernachlässigung der Wechselwirkungsenergie bei starker Dämpfung im Prinzip möglich und, wie aus dem Experiment hervorgeht, oftmals praktisch zulässig. Man kann die Wechselwirkungsenergie vernachlässigen, wenn die Kräfte zwischen dem Untersystem und seiner Umgebung den Charakter momentaner Stöße tragen. In einem Gas aus starren Kügelchen zum Beispiel ist die mittlere Wechselwirkungsenergie (die mittlere potentielle Energie) gleich Null, obwohl bei den Stößen eine Energieübertragung erfolgt. Diese Behauptung, die mittlere potentielle Energie sei im Fall momentaner Stöße, wenn also die Wechselwirkungsenergie zwischen den Teilchen sehr stark von ihrem gegenseitigen Abstand abhängig gleich Null, folgt aus dem Virialsatz [LANDAU-LIFSHIZ Seite 111]. Sie ergibt sich ebenfalls leicht aus einfachen physikalischen Überlegungen: während des Stoßes, wenn beide Teilchen zur Ruhe kommen, ist die potentielle Energie endlich und gleich der kinetischen Energie der Teilchen vor dem Stoß; daraus folgt, daß, wenn die Stoßzeit gegen Null geht, das zeitliche Mittel der potentiellen Energie ebenfalls verschwinden muß.

Im Fall momentaner Stöße gilt also die Beziehung (1,13). Diese Schlußfolgerung steht im vollen Einklang mit der oben auf Grund der NYQUISTSchen Formel unter Annahme der Frequenzunabhängigkeit des Widerstandes gezogenen, da eben für momentane Stöße der Widerstand R nicht von der Frequenz abhängen kann [für momentane Stöße hängt, wie oben angedeutet,

die Größe $w(\omega) = \frac{2}{\pi} R(\omega) k T$ nicht von ω ab, und daraus folgt, daß in diesem

Fall $R(\omega)$ konstant ist].

Ist dagegen $R = R(\omega)$, so läßt sich aus der Formel von NYQUIST und den Ausdrücken für K und \bar{U} , die von C, L, R abhängen [siehe (1,12)], die Beziehung (1,13) nicht folgern. In diesem Fall ist die Lage überhaupt komplizierter, man kann die Bewegungsgleichung für die Ladung q nicht mehr in der Form (1,1) schreiben. An Stelle dieser Gleichung gilt, wenn wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß sich $q(t)$ in ein FOURIER-Integral $q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_{\omega} e^{i\omega t} d\omega$ entwickeln läßt:

$$(1,15) \quad \left\{ \begin{aligned} L\ddot{q} + \frac{q}{C} + \mathcal{E}(R) &= \mathcal{E}, \\ \mathcal{E}(R) &= \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega R(\omega) q_{\omega} e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\omega}{2\pi} R(\omega) q(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\omega d\tau, \end{aligned} \right.$$

wobei \mathcal{E} die fluktuierende Spannung ist.

Die Integrodifferentialgleichung (1,15) führt bei nicht konstantem R offenbar nicht auf die mechanische Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad; die Frage nach der Anwendbarkeit der Statistik auf die Größen K und U , die von dem „Quasifreiheitsgrad“ q abhängen, verlangt also ein

sondere Betrachtung¹⁾. Eine andere Seite dieses Problems bildet die Tatsache, daß der Widerstand R für nichtmomentane Stöße von der Frequenz abhängt; in diesem Fall kann man im allgemeinen die Wechselwirkungsenergie des Untersystems mit seiner Umgebung nicht vernachlässigen und infolgedessen nicht ohne weiteres sämtliche Ergebnisse der statistischen Mechanik anwenden. Wir werden hier auf diesen interessanten Problemkreis nicht näher eingehen, da für das Folgende nur eine Klärung der Art und der Bedeutung der Bedingungen erforderlich war, unter denen für einen elektrischen Schwingungskreis die Beziehung (1,13) $\bar{U} = \bar{K} = kT/2$ gilt.

2. Die quantentheoretische NYQUIST-Formel

Die klassische NYQUIST-Formel (1,9) gilt nur bei Vernachlässigung aller Quanteneffekte, wenn also für die betrachtete Frequenz ω die Bedingung

$$(2,1) \quad \hbar \omega \ll kT,$$

oder

$$(2,1') \quad \omega \ll 1,3 \cdot 10^{11} T.$$

erfüllt ist. Selbst für die Frequenz $\omega = 2 \cdot 10^{12}$ ($\lambda = 2\pi c/\omega \approx 1$ mm) bedeutet diese Bedingung $T \gg 15^\circ \text{ K}$. Ist beispielsweise $\omega = 6 \cdot 10^{10}$ ($\lambda \approx 3$ cm), so ist zur Anwendung der klassischen Formeln notwendig $T \gg 0,5^\circ \text{ K}$.

Im Gebiet der Radiofrequenzen können also Quanteneffekte nur bei tiefen Temperaturen auf den Charakter der elektrischen Schwingungserscheinungen an Leitern von Einfluß sein. Bei Zimmertemperatur ($T \approx 300^\circ \text{ K}$) braucht man die Quantenkorrekturen nur beim Übergang zu Wellen zu berücksichtigen, die kürzer sind als 1 mm, oder aber, wenn es sich um die Beobachtung äußerst geringer Abweichungen von der klassischen NYQUIST-Formel handelt.

Trotz alledem kann man kaum daran zweifeln, daß es wünschenswert ist, eine quantentheoretische NYQUIST-Formel abzuleiten, also eine Formel, die bei beliebigen Frequenzen ω und Temperaturen T verwendbar ist und unter der Bedingung (2,1) in die klassische Formel (1,9) übergeht. Offenbar kann man, wenn man über eine solche quantentheoretische Formel verfügt, für gegebene T die Genauigkeit der Formel (1,9) quantitativ feststellen, abgesehen davon, daß das Gebiet tiefer Temperaturen und sehr kurzer Wellen, in dem man die klassische Formel überhaupt nicht mehr verwenden kann, ebenfalls nicht ohne Bedeutung ist. Die quantentheoretische NYQUIST-Formel erhält man sofort, wenn man genau so vorgeht, wie bei der Ableitung der klassischen Formel, dabei aber berücksichtigt, daß die mittlere potentielle und die mittlere kinetische Energie eines schwach gedämpften Schwingungs-

In diesem Zusammenhang widerspricht die Tatsache, daß im mechanischen Fall für $\bar{E} = \bar{r}(\omega)$ die Größe \bar{K} , die mit Hilfe der Formel (1,9) berechnet wird, verschieden von $kT/2$ ist, nicht unbedingt der aus der klassischen Statistik folgenden Gleichheit der kinetischen Energie $\bar{K} = \frac{mv^2}{2}$ mit $kT/2$, die unabhängig von der Art der Wechselwirkung des betrachteten Teilchens der Masse m mit seiner Umgebung ist.

kreises (Oszillators) im quantentheoretischen Fall nicht gleich $kT/2$, sondern gleich dem bekannten Ausdruck

$$(2,2) \quad \bar{U} = \bar{K} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar \omega_0}{2} + \frac{\hbar \omega_0}{e^{\frac{\hbar \omega_0}{kT}} - 1} \right)$$

sind, wobei $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ die Eigenfrequenz des Schwingkreises ist. Für einen hinreichend schwach gedämpften Schwingkreis erhalten wir also aus (1,8)

$$\frac{\pi}{4} f(\omega_0, T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar \omega_0}{2} + \frac{\hbar \omega_0}{e^{\frac{\hbar \omega_0}{kT}} - 1} \right)$$

und finden unter Berücksichtigung der Möglichkeit, wegen der Universalität der Funktion f einen Schwingkreis mit einer beliebigen Frequenz ω_0 zu verwenden, die quantentheoretische NYQUIST-Formel, die für jedes $R(\omega)$ gilt

$$(2,3) \quad w(\omega) = R(\omega) \cdot f(\omega, T) = \frac{2}{\pi} R(\omega) \left\{ \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \right\}.$$

Unter der Bedingung (2,1) geht diese Formel in (1,9) über, wie das auch sein muß. Die Formel (2,3), allerdings ohne die Nullpunktsenergie $\hbar \omega/2$, wurde bereits von NYQUIST [1928] abgeleitet, und zwar im wesentlichen ebenfalls durch Ersetzung der mittleren Energie des Oszillators $\bar{E} = kT$ durch den quantentheoretischen Wert

$$\bar{E} = \bar{K} + \bar{U} = \frac{\hbar \omega_0}{2} + \frac{\hbar \omega_0}{e^{\frac{\hbar \omega_0}{kT}} - 1}$$

Diese Herleitung kann jedoch ohne weitere Untersuchungen nicht als befriedigend angesehen werden. Das liegt daran, daß neben dem klassischen Ausdruck für die mittlere Oszillatorenenergie bei der Herleitung der klassischen NYQUIST-Formel (1,9) der Begriff der Impedanz $Z(\omega)$ [siehe (1,4)] und ein konkreter Ausdruck für die Impedanz benutzt wurden, der die Parameter des Schwingkreises L, C, R enthält. Indessen wird die Impedanz gewöhnlich eingeführt, indem man von der Bewegungsgleichung (1,10) ausgeht, die klassischen Charakter besitzt. Mit anderen Worten erhebt sich die Frage, ob sich das klassische Element in der in Abschnitt 1 gegebenen Herleitung der NYQUIST-Formel auf die Annahme beschränkt, daß die mittlere Energie des Schwingkreises gleich ihrem klassischen Wert kT ist.

Zur Beantwortung dieser Frage überlegen wir, wie ein elektrischer Schwingkreis (ein elektrisches System) in der Quantentheorie zu behandeln ist. Schon im klassischen Gebiet bildet die Einführung des Widerstandes, das heißt des dissipativen Gliedes $R\dot{q}$ in die Bewegungsgleichung (1,10) das Ergebnis einer Mittelung über das mikroskopische Bild, in dem es keinen Widerstand

und in dem sämtliche Kräfte konservativ sind. Die Durchführung einer solchen Mittelung und die Einführung der Kraft $R\dot{q}$ sind nur unter der Bedingung möglich, daß das System (der Schwingungskreis, Pendel + Gas) nur wenige Freiheitsgrade besitzt, das heißt ein makroskopisches System im Sinne der statistischen Physik bildet. Vom Standpunkt der Quantentheorie bedeutet dies, daß die Energieterme des Systems sehr dicht, sehr nahe beieinander liegen¹⁾. Ist $H_0(x, p)$ der HAMILTON-Operator für dieses System in Abwesenheit einer äußeren Störung, so werden die Energieterme E_n des Systems durch die Gleichung

$$H_0 \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x)$$

beschrieben, wobei x und $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ die Koordinaten und Impulse der zum System gehörigen Teilchen sind.

Es werde nun ein System gehörigen Leiter der Länge l eine äußere elektromagnetische Strahlung $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$. Dann beträgt die Feldstärke im Leiter $E = \mathcal{E}/l$ und die Störungsenergie

$$V = \sum_k e_k x_k E = \mathcal{E} Q,$$

bei sind e_k und x_k Ladung und Koordinate des k -ten Teilchens und $Q = \sum_k \frac{e_k x_k}{l}$. Der HAMILTON-Operator des gestörten Systems ist $H_0 + V$,

sein zeitliches Verhalten wird beschrieben durch die SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H_0 + V) \Psi = H_0 \Psi + \mathcal{E}_0 \sin \omega t \cdot Q \Psi.$$

Zur Lösung dieser Gleichung benutzt man die nichtstationäre Störungsrechnung, die in allen Lehrbüchern der Quantenmechanik dargelegt wird (siehe zum Beispiel LANDAU-LIFSHIZ, Quantenmechanik, § 40]. Deshalb werden wir nicht bei Einzelheiten, geben aber trotzdem die wichtigsten Formeln an, die zum Verständnis des Folgenden erforderlich sind. Den Ausgangspunkt für die nichtstationäre Störungsrechnung bildet die Entwicklung der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ nach den Eigenfunktionen des ungestörten Problems Ψ_k :

$$\Psi = \sum a_k(t) \Psi_k(x) e^{\frac{i E_k t}{\hbar}}.$$

Setzen wir (2,6) in (2,5) ein, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem für die Koeffizienten $a_k(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{da_k}{dt} = \sum_n V_{kn} a_n e^{\frac{i}{\hbar} (E_k - E_n) t}, \\ V_{kn} = \int \Psi_k^*(x) V(x, t) \Psi_n(x) dx. \end{array} \right.$$

Um Mißverständnisse zu vermeiden, betonen wir, daß, wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt, das System nicht nur den Teil umfaßt, der durch eine Koordinate q oder x gekennzeichnet wird (wir bezeichnen diesen Teil als „Untersystem“), sondern auch andere Teile des Systems, wie das Gas im Fall des Pendels, die Leiter im Fall des Schwingungskreises, deren Wechselwirkung mit dem Untersystem zur Dämpfung der Schwingungen führt. Abgesehen von dieser Wechselwirkung mit den übrigen Teilen des Systems können die Terme des Untersystems selbst in beliebiger Entfernung voneinander liegen.

Befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ das System im Zustand n , das heißt, ist für $t = 0$

$$a_k = a_k^{(0)} = \delta_{kn},$$

so ist in erster Näherung

$$i\hbar \frac{da_k^{(1)}}{dt} = V_{kn} e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_n)t} \quad \text{und} \quad a_k^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{kn} e^{i\omega_{kn}t} dt$$

mit

$$\omega_{kn} = \frac{E_k - E_n}{\hbar}.$$

Im Fall (2,5), wenn also $V = \mathcal{E}_0 Q \sin \omega t$ ist, gilt

$$(2,8) \quad \begin{cases} a_k^{(1)} = -\frac{\mathcal{E}_0 Q_{kn}}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_{kn} - \omega)t} - 1}{\hbar(\omega_{kn} - \omega)} + \frac{e^{i(\omega_{kn} + \omega)t} - 1}{\hbar(\omega_{kn} + \omega)} \right], \\ Q_{kn} = \int \Psi_k^* Q \Psi_n dx, \quad \omega_{kn} = \frac{E_k - E_n}{\hbar}. \end{cases}$$

Unter dem Einfluß der Störung geht das System vom Ausgangszustand n in andere Zustände über, und zwar vorwiegend in die Zustände, für die die Frequenz ω in der Nähe von $\pm \omega_{kn}$ liegt. Im Fall hinreichend dicht gelegener praktisch kontinuierlicher Terme spielen nur diejenigen Übergänge eine Rolle, für die mit großer Genauigkeit die Resonanzbedingung $\omega = \pm \omega_{kn}$ erfüllt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit für den Übergang des Systems vom Term n auf die betreffenden Terme, bezogen auf die Zeiteinheit, gegeben wird durch

$$(2,9) \quad W_n = \frac{\pi}{2\hbar} \mathcal{E}_0^2 \left\{ |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \varrho(E_n + \hbar\omega) + |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \varrho(E_n - \hbar\omega) \right\},$$

dabei ist $\varrho(E) dE$ die Dichte der Energiet Terme im Intervall $E, E + dE$; die Matricelemente Q_{kn} sind in bequemerer Form geschrieben:

$$\langle E_n \pm \hbar\omega | Q | E_n \rangle \equiv Q_{kn} \quad \text{und} \quad E_k = E_n \pm \hbar\omega.$$

Bei Übergängen vom Zustand E_n in einen Zustand $E_k = E_n + \hbar\omega$ absorbiert das System ein Quant $\hbar\omega$, während es bei einem Übergang in den Zustand $E_k = E_n - \hbar\omega$ die Energie $\hbar\omega$ abgibt. Die gesamte aufgenommene Leistung beträgt demnach

$$(2,10) \quad P_n(\omega) = \frac{\pi}{2} \mathcal{E}_0^2 \omega \left\{ |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \varrho(E_n + \hbar\omega) - |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \varrho(E_n - \hbar\omega) \right\}.$$

Ein reales System befindet sich auch vor Einschalten der Störung V bei einem von Null verschiedenen absoluten Temperatur niemals in einem reinen Zustand n . Zur Bestimmung der absorbierten Energie hat man also den Ausdruck (2,10) über alle Anfangszustände zu mitteln.

zeichnen wir das statistische Gewicht eines Zustandes der Energie E_n mit $f(E_n)$, so daß $\sum f(E_n) = 1$ ist, so erhalten wir für die aufgenommene Leistung

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} P(\omega) &= \frac{\pi}{2} \mathcal{E}_0^2 \omega \sum_n f(E_n) \left\{ |\langle E_n + \hbar \omega | Q | E_n \rangle|^2 \varrho(E_n + \hbar \omega) \right\} - \\ &- |\langle E_n - \hbar \omega | Q | E_n \rangle|^2 \varrho(E_n - \hbar \omega) \left\{ = \right. \\ &- \frac{\pi}{2} \mathcal{E}_0^2 \omega \int_0^\infty \varrho(E) f(E) \left\{ |\langle E + \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E + \hbar \omega) - \right. \\ &- \left. |\langle E - \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E - \hbar \omega) \right\} dE; \end{aligned} \right.$$

bei ist berücksichtigt, daß die Anzahl der Terme im Intervall dE gleich $E) dE$ ist und daß der Übergang von Summation zu Integration wegen der großen Termichte möglich ist.

Die Formel (2.11) befindet sich in voller Übereinstimmung mit dem bekannten Satz aus der Theorie der Wechselströme, wonach die mittlere Leistung, die ein lineares System mit der Impedanz $Z(\omega)$ unter dem Einfluß einer Spannung $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ aufnimmt, proportional \mathcal{E}_0^2 ist; und zwar hat sie den Wert

$$(12) \quad P(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2},$$

wobei ist $R = \operatorname{Re} Z$, und die Impedanz Z wird gegeben durch die Beziehung

$$(13) \quad \mathcal{E} = Z(\omega) I$$

unter der Bedingung, daß die Zeitabhängigkeit von \mathcal{E} einem $e^{i\omega t}$ -Gesetz folgt. Hieraus ergibt sich, daß die Linearität des Systems und damit die Existenz einer Impedanz $Z(\omega)$ für jedes dissipative System (System mit dichten Termen) gewährleistet ist, falls nur die eine Bedingung erfüllt ist, daß die Störung hinreichend klein ist, so daß man sich auf die erste Näherung der Störungstheorie beschränken kann. Zu dieser Schlußfolgerung kann man selbstverständlich auch gelangen, ohne die vom System absorbierte Leistung zu berechnen, indem man nämlich unmittelbar die Beziehung zwischen Strom und Spannung aufstellt.

In der klassischen Theorie ist der Gesamtstrom in dem betrachteten Leiter $I = \sum_k \frac{e_k \dot{x}_k}{l} = \dot{Q} - \frac{dQ}{dt}$ (sind z. B. Ladungen und Geschwindigkeiten aller Teilchen gleich und betragen sie e bzw. \dot{x} , so ist $\sum e_k \dot{x}_k = e N \dot{x}$, wobei N die Gesamtzahl der Teilchen in einem Leiterstück der Länge l ist; die Stromstärke andererseits beträgt $e n \dot{x}$, wobei $n = N/l$ die Anzahl der Teilchen pro Längeneinheit ist). In der Quantentheorie wird die Stromstärke durch denselben Ausdruck gegeben, nur ist unter \dot{x}_k die mittlere Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \frac{d}{dt} \int \Psi^* x_k \Psi dx = \frac{i}{\hbar} \int \Psi^* (H_0 x_k - x_k H_0) \Psi dx = \\ &= \int \Psi^* \frac{p_k}{m_k} \Psi dx \end{aligned}$$

zu verstehen; hierbei sind m_k und p_k Masse und Impuls des k -Teilchen. Befand sich vor dem Beginn der Störung das System in einem Zustand Ψ in dem der Strom gleich Null ist, so ist nach dem Einschalten der Störung der ersten Näherung der Störungstheorie

$$\Psi = \Psi_n + \Psi^{(1)}$$

und der Strom

$$I = \bar{Q} = \frac{d}{dt} \int \Psi^* Q \Psi dx = \frac{d}{dt} \int (\Psi_n^* Q \Psi^{(1)} + \Psi^{*(1)} Q \Psi_n) dx$$

mit

$$\Psi^{(1)} = \sum a_k^{(1)} \Psi_k e^{\frac{i}{\hbar} E_k t}$$

[siehe (2,6) und (2,8)]. Da die Koeffizienten $a_k^{(1)}$ nach (2,8) proportional sind, gilt dasselbe für den Strom I . In der komplexen Schreibweise läßt sich diese Proportionalität in der Form (2,13) darstellen, was wir nachweisen wollten¹⁾. Den komplizierten allgemeinen Ausdruck für $Z(\omega)$ brauchen wir hier nicht hinschreiben, da er später nicht benötigt wird. Was die im Gesamtausdruck vorkommenden Größen $\frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$ angeht, so erhalten wir durch Vergleich von (2,11) mit (2,12)

$$(2,14) \quad \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = \pi \omega \int_0^\infty \rho(E) f(E) \left\{ |\langle E + \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E + \hbar \omega) - |\langle E - \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E - \hbar \omega) \right\} dE.$$

Ist das auf das System einwirkende äußere Feld nicht sinusförmig, so bleiben alle abgeleiteten Ergebnisse für die FOURIER-Komponenten der Größen \bar{Q} und $\bar{Q} = I$ in Kraft. An die Stelle der Größe $\frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2$ tritt dabei die in (1) eingeführte spektrale Dichte $w(\omega)$ der Spannung [ist $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, so $w(\omega') = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \delta(\omega - \omega')$], und die insgesamt absorbierte Leistung beträgt

$$P = \int \frac{R(\omega) w(\omega)}{|Z|^2} d\omega,$$

wobei die Größe $\frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$ durch Formel (2,14) gegeben wird.

Die dargelegte Möglichkeit, den Begriff der Impedanz im Rahmen der Quantentheorie einzuführen, ist in gewissem Grade trivial, da das quantentheoretische

¹⁾ Der Einfachheit halber wurde der Ausdruck für den Strom I unter der Voraussetzung aufgestellt, daß sich das System für $t = 0$ in dem durch die Funktion Ψ_n beschriebenen Zustand befindet. Der Schluß auf die Existenz der Impedanz ist aber offenbar sehr allgemein und bleibt bei der Beschreibung des Systems im Anfangszustand nicht durch eine beliebige Funktion Ψ , sondern auch durch eine statistische Matrix in Kl. [CALLEN und WELTON (1951)].

gehen das allgemeinste ist, und da, wenn aus dem Experiment bekannt ist, daß für ein gegebenes System die Beziehung (2,13) gilt, kein Grund zum Zweifel der grundsätzlichen Möglichkeit vorhanden ist, diese Beziehung auch durch die ins einzelne gehende quantenmechanische Analyse des Verhaltens des Systems zu gewinnen. Trotzdem erweist sich die dargelegte Betrachtungsweise als nützlich, indem sie ein besseres Verständnis des ganzen Problems ermittelt und insbesondere klärt, wann der Begriff „lineares dissipatives System“ anwendbar ist.

Am Grund des Gesagten ist klar, daß der wichtige Satz (1,6), bei dessen Ableitung die konkreten Eigenschaften der Impedanz nicht benutzt wurden, auch im Bereich der Quantenerscheinungen gültig bleibt. Hieraus folgt ferner, daß man zur Ableitung der quantentheoretischen NYQUIST-Formel ein beliebiges, möglichst einfaches, lineares, dissipatives Modellsystem betrachten kann. Als ein solches wählen wir ebenso wie im klassischen Fall einen Schwingkreis (Oszillator) mit hinreichend kleiner Dämpfung.

Im ungedämpften Fall hat der HAMILTON-Operator für den Oszillator, der unter dem Einfluß einer koordinatenunabhängigen Kraft $F(t)$ steht, die Form

$$H_0 = p^2/2m + kx^2/2 - F(t);$$

bei ist $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Ferner gilt für den Mittelwert von x , also für $\bar{x} = \int \Psi^* x \Psi dx$ in einem System mit beliebiger potentieller Energie $V(x)$ die Gleichung $m\ddot{\bar{x}} = -\frac{\partial V(\bar{x})}{\partial x}$ (dieser Satz wird manchmal als EHRENFEST'scher Satz bezeichnet). Falls die Funktion $V(x)$ in x quadratisch ist, gilt ebenfalls

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = \frac{\partial V(\bar{x})}{\partial x} = \left[\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}}$$

und für \bar{x} gilt die klassische Bewegungsgleichung, d. h. in unserem Fall die Gleichung $m\ddot{\bar{x}} + k\bar{x} = F(t)$. Ist $F = F_0 e^{i\omega t}$, so ist $\bar{x} = \frac{F}{i(\omega m - k/\omega)}$, und

definitionsgemäß $F = Z(\omega) \dot{\bar{x}}$ ist, erhalten wir für die Impedanz den Ausdruck $Z(\omega) = i\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)$.

Im elektrischen Fall spielt die Spannung \mathcal{E} die Rolle der Kraft F , und man ersetzt m durch L und k durch $1/C$ zu ersetzen, d. h. es ist $Z(\omega) = i(\omega L - 1/\omega C)$. Der Fall des mechanischen Oszillators wurde zuerst behandelt, weil hier alles besonders durchsichtig liegt. Beim Übergang zum elektrischen Schwingkreis ist man, wenn man sich nicht einfach auf die naive Ersetzung von m und k durch L und $1/C$ beschränken will, auch zu untersuchen, auf welche Weise die Energie im Schwingkreis der Ausdruck

$$H_0 = p^2/2L + q^2/2C - q\mathcal{E}$$

herauskommt. Diese Frage hat jedoch nichts spezifisch Quantentheoretisches und es wäre deshalb nicht sinnvoll, näher auf sie einzugehen¹⁾.

Im dämpfungsfreien Fall gilt also für die Impedanz eines Oszillators und ein Schwingungskreis in der Quantentheorie derselbe Ausdruck wie in der klassischen Theorie (dieser Umstand findet in der Dispersionstheorie weitgehend Verwendung). Bei Vorhandensein einer sehr schwachen Dämpfung kann man den Imaginärteil von Z als unverändert ansehen, während der Realteil nun eine Funktion $R(\omega)$ wird, also $Z(\omega) = R(\omega) + i(\omega L - 1/\omega C)$. Dieser Ausdruck wurde in (1,8) bei der Ableitung der NYQUIST-Formel benutzt, wobei man, wie zu Beginn dieses Abschnittes angedeutet, zur Gewinnung der quantentheoretischen Formel (2,3) den Ausdruck (1,8) den quantentheoretischen Ausdruck (2,2) für die mittlere potentielle Energie eines Oszillators (Schwingungskreis) gleichzusetzen hat.

Alle dargelegten Überlegungen kann man als strenge Begründung der quantentheoretischen NYQUIST-Formel (2,3) ansehen. Interessanterweise wurde die Formel kürzlich auf andere Weise, ohne Benutzung des Hilfssatzes (1,1) abgeleitet. Der entsprechende Beweis, der CALLEN und WELTON zuzuschreiben ist [CALLEN und WELTON (1951)], ist ebenfalls völlig überzeugend und außerdem auch in methodischer Hinsicht wertvoll. Wir bringen ihn deshalb zum Schluß dieses Artikels (siehe Anhang).

Wir wenden uns nun der Erörterung einiger Ergebnisse zu, die man auf Grund der quantentheoretischen NYQUIST-Formel erhält. Aus der klassischen NYQUIST-Formel (1,9) folgt, daß das mittlere Schwankungsquadrat $\overline{\mathcal{E}^2}$ der Spannung

$$(2,15) \quad \overline{\mathcal{E}^2} = \int_0^\infty w(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} kT \int_0^\infty R(\omega) d\omega$$

ist. Ist $R = \text{const}$, so $\overline{\mathcal{E}^2} \rightarrow \infty$. Dieses Ergebnis ist sehr plausibel, da die Annahme der Konstanz von R , wie in Abschnitt 1 angedeutet, der Behauptung gleichwertig ist, daß die Spannung aus momentanen Stößen besteht; in einem Spektrum momentaner Stöße sind beliebig hohe Frequenzen mit dem gleichen Gewicht vorhanden wie die tiefen. Tatsächlich kann natürlich bei hinreichend hohen Frequenzen kein Stoß mehr als momentan angesehen werden: handelt es sich beispielsweise um Molekülstöße auf eine Pendelmass, so beträgt die Dauer $\Delta\tau \approx a/v$, wo $v \approx \sqrt{kT/m}$ die thermische Molekülgeschwindigkeit und $a \approx 10^{-8}$ der Moleküldurchmesser (für Luftmoleküle bei $T \approx 300^\circ \text{K}$, $\Delta\tau \approx 10^{-13} \text{ sec}$). Daraus geht hervor, daß für hohe Frequenzen $\omega \gtrsim \Delta\tau^{-1}$ der Widerstand R notwendigerweise von der Frequenz abhängen muß, so daß

¹⁾ Wir weisen darauf hin, daß unter Bedingungen, bei denen man die ganze Ladung auf den Platten eines Kondensators konzentriert ansehen kann, an dem eine Spannung liegt, die oben eingeführte Größe $Q = \sum_k e_k x_k / l$ unmittelbar gleich der Ladung q einer Kondensatorplatten ist, denn in diesem Fall ist l der Abstand zwischen den Kondensatorplatten und $\sum e_k x_k = q(x_2 - x_1)$, wobei q die Summe der e_k ist, genommen über eine Platte; x_2 und x_1 die Koordinaten der Platten.

Das Integral in (2,15) konvergiert¹⁾. Dabei ist die Verwendung des Ausdrucks (15) nur gerechtfertigt, wenn für die höchsten für den Wert des Integrals $R(\omega) d\omega$ wesentlichen Frequenzen die klassische Bedingung (2,1) noch erfüllt ist. Andernfalls muß man für die Rechnung die quantentheoretische Formel (3) benutzen, die die Endlichkeit des temperaturabhängigen Teils von $\overline{\mathcal{E}^2}$ selbst bei $R = \text{const}$ gewährleistet. Nach (2,3) ist

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathcal{E}^2} &= \overline{\mathcal{E}^2(0)} + \overline{\mathcal{E}^2(T)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \left\{ \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \right\} d\omega, \\ \overline{\mathcal{E}^2(T)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{R(\omega) \hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} d\omega. \end{aligned} \right.$$

Der erste Teil von $\overline{\mathcal{E}^2}$, d. h. die Größe $\overline{\mathcal{E}^2(0)} = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) d\omega$ besitzt rein

quantentheoretischen Charakter (er beruht auf dem Vorhandensein der Nullpunktschwingungen), ist temperaturunabhängig und bildet folglich keine Quelle von „thermischem Rauschen“, für das man sich bei der Untersuchung der elektrischen Schwingungen gewöhnlich interessiert. Was das mittlere Quadrat der thermischen Schwankungsspannung $\overline{\mathcal{E}^2(T)}$ angeht, so ist für

$R = \text{const}$: $\overline{\mathcal{E}^2(T)} = \frac{\pi R}{3 \hbar} (kT)^2$, denn es ist $\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \pi^2/6$. In einem Leiter-

kreis, der nur aus zwei Leitern besteht, deren Widerstand R frequenzunabhängig ist, beträgt die „Schwankungsleistung“, die ein Leiter abgibt,

$$P = \int_0^\infty \frac{R w d\omega}{|Z|^2} = \frac{1}{4R} \int_0^\infty w d\omega = \frac{\overline{\mathcal{E}^2(T)}}{4R} = \frac{\pi}{12 \hbar} (kT) =$$

$$= 4,7 \cdot 10^{-6} T^2; \text{ bei } T \approx 300^\circ \text{ K ist } P \approx 0,5 \text{ erg.}$$

Wir stellen jetzt die quantentheoretischen Ausdrücke für die mittlere elektrische und magnetische Energie im Schwingkreis auf [siehe (1,8) und (2,2)]:

Wir sehen hier und weiter unten von anderen Gründen ab, die die Anwendung aller vorhandenen Formeln bei hohen Frequenzen verhindern können (in erster Linie ist hier zu erwähnen, daß oben überall das Erfülltsein der Quasistationaritätsbedingung vorausgesetzt wurde, die für hinreichend hohe Frequenzen ungültig wird).

$$\begin{aligned}
 (2,17) \quad \bar{U} &= \frac{\bar{q}^2}{2C} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{CRf(\omega, T) d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \alpha \left\{ \frac{\hbar \eta}{2\sqrt{LC}} + \frac{\frac{\hbar \eta}{\sqrt{LC}}}{\exp\left(\frac{\hbar \eta}{\sqrt{LC} kT}\right) - 1} \right\} \frac{d\eta}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} \\
 \bar{K} &= \frac{L\bar{I}^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{CRLC\omega^2 f(\omega, T) d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \alpha \eta^2 \left\{ \frac{i\eta}{2\sqrt{LC}} + \frac{\frac{\hbar \eta}{\sqrt{LC}}}{\exp\left(\frac{\hbar \eta}{\sqrt{LC} kT}\right) - 1} \right\} \frac{d\eta}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} \\
 \alpha &= \frac{CR}{\sqrt{LC}}, \quad \eta = \sqrt{LC}\omega, \quad \bar{U} = \bar{U}(0) + \bar{U}(T); \quad \bar{K} = \bar{K}(0) + \bar{K}(T)
 \end{aligned}$$

Ist der Schwingkreis schwach gedämpft, d. h. ist die Bedingung (1,1) $\frac{R(\omega_0)}{L} \ll \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ erfüllt, so gilt für \bar{U} und \bar{K} der Ausdruck (2,2) für die mittlere Energie des harmonischen Oszillators; dieser Umstand wurde bei der Herleitung der quantentheoretischen NYQUIST-Formel (2,3) benutzt. In derartiger schwach gedämpfter Schwingkreis verhält sich klassisch, wenn

$$(2,18) \quad \hbar \omega_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{LC}} \ll kT.$$

st. Unter dieser Bedingung ist

$$\bar{U} = \bar{K} = kT/2.$$

Bei endlicher Dämpfung kann man aus der Formel (2,17) natürlich nur die konkreten Schlußfolgerungen ziehen, wenn man die Funktion $R(\omega)$ festlegt (L und C kann man stets als konstant ansehen). Später werden wir deshalb nur den augenblicklich wichtigsten Fall behandeln, daß R konstant ist, d. h. daß alle Parameter des Schwingkreises frequenzunabhängig sind.

Die von der Temperatur T unabhängigen Anteile von \bar{U} und \bar{K} , d. h. die Größen $\bar{U}(0)$ und $\bar{K}(0)$ lassen sich für beliebige Werte der Parameter explizit angeben. So ist für $\alpha < 2$

$$\begin{aligned}\bar{U}(0) &= \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{LC}} \int_0^\infty \frac{\alpha\eta d\eta}{\alpha^2\eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha^2 - 2}{\alpha\sqrt{4 - \alpha^2}} \right]\end{aligned}$$

und für $\alpha = 2$ ist $\bar{U}(0) = \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{LC}}$. Der Wert $K(0)$ ist für $\alpha \neq 0$ und $\alpha = \text{const}$ unendlich, weil

$$\bar{K}(0) = \frac{\hbar\alpha}{4\pi\sqrt{LC}} \left[\ln |\eta^4 + (\alpha^2 - 2)\eta^2 + 1| \right]_0^\infty + \frac{2 - \alpha^2}{2} \bar{U}(0).$$

Die Berücksichtigung der ω -Abhängigkeit der Größe R bei hohen Frequenzen führt selbstverständlich zu einem endlichen $\bar{K}(0)$. Für $\alpha = \frac{CR}{\sqrt{LC}} \rightarrow 0$ ist im Einklang mit (2,2) $\bar{U}(0) = \bar{K}(0) = \frac{\hbar}{4\sqrt{LC}} = \hbar\omega_0/4^1$.

Für $\alpha \neq 0$ sind die Energien $\bar{U}(0)$ und $\bar{K}(0)$ einander nicht gleich und hängen von den beiden Parametern $\alpha = \frac{CR}{\sqrt{LC}}$ und $\frac{\hbar}{\sqrt{LC}}$ ab. Analog liegen die Dinge auch für die temperaturabhängigen Anteile von \bar{U} und \bar{K} , denen das Hauptinteresse gilt:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}(T) &= \frac{kT}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha\beta\eta d\eta}{(e^{\beta\eta} - 1) [\alpha^2\eta^2 + (\eta^2 - 1)^2]} = \\ &= T\Phi_u \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} T, \frac{CR}{\sqrt{LC}} \right), \\ \bar{K}(T) &= \frac{kT}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha\beta\eta^3 d\eta}{(e^{\beta\eta} - 1) [\alpha^2\eta^2 + (\eta^2 - 1)^2]} = \\ &= T\Phi_k \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} T, \frac{CR}{\sqrt{LC}} \right), \\ \alpha &= \frac{CR}{\sqrt{LC}}, \quad \beta = \frac{\hbar}{kT\sqrt{LC}}. \end{aligned} \right\} \quad (2,19)$$

Nimmt man etwa an, daß $R(\omega) = R$ für $\omega < \omega_m$ und $R = 0$ für $\omega > \omega_m$ ist,

ist $\bar{K}(0) = \frac{\hbar}{4\sqrt{LC}} \ln [\eta_m^4 + (\alpha^2 - 2)\eta_m^2 + 1] + \frac{2 - \alpha^2}{2} \bar{U}(0)$, wobei der Wert des ersten Teils von $K(0)$ durch die hohen Frequenzen bestimmt wird; für $\alpha \rightarrow 0$ geht dieser Anteil gegen Null.

Bei beliebigen Werten von α und β gelingt es nicht, die Funktionen Φ_u und Φ_k anders als durch Integrale auszudrücken. Ist die Dämpfung schwach, so daß gilt

$$(2,20) \quad \alpha = \frac{CR}{\sqrt{LC}} \ll 1$$

[diese Bedingung ist gleichwertig der Bedingung (1,14): $R/L \ll 1/\sqrt{LC}$], so gilt, wie aus dem bisher Gesagten hervorgeht,

$$(2,21) \quad \Phi_u = \Phi_k = \Phi(\sqrt{LC} T) = \frac{k}{2} \cdot \frac{\frac{h}{\sqrt{LC} k T}}{e^{\frac{h}{\sqrt{LC} k T}} - 1}.$$

Unter der Bedingung (2,20) kann man, wenn man ferner setzt $\beta = \frac{h}{\sqrt{LC} k T} \ll 1$, zur Auswertung der Integrale (2,19) die Entwicklung $\frac{\beta \eta}{e^{\beta \eta} - 1} = 1 - \beta \eta/2 + (\beta \eta)^2/12 \dots$ verwenden. Man erhält, abgesehen von Gliedern höherer als erster Ordnung in β , etwa für $\bar{U}(T)$

$$(2,22) \quad \begin{aligned} \bar{U}(T) &= \frac{kT}{2} \left\{ 1 - \frac{h}{\pi \sqrt{LC} k T} \frac{1}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\alpha^2 - 2}{\alpha \sqrt{4 - \alpha^2}} \right] \right\} = \\ &= \frac{kT}{2} \left\{ 1 - \frac{h}{2 \sqrt{LC} k T} - \frac{h R}{2 \pi L k T} - \dots \right\}. \end{aligned}$$

Bei starker Dämpfung, d. h. für

$$(2,23) \quad \alpha = \frac{CR}{\sqrt{LC}} \gg 1,$$

ist nur das Verhältnis der Größen α und β von Bedeutung. Wir erhalten hierbei (in allen Fällen ist $\alpha \gg 1$):

$$(2,24a) \quad \frac{h}{RC} \ll kT \quad (\beta \ll \alpha): \quad U(T) = \frac{kT}{2},$$

$$(2,24b) \quad \frac{h}{RC} \gg kT \quad (\beta \gg \alpha): \quad U(T) = \frac{\pi}{6} \left(\frac{kT}{\frac{h}{RC}} \right) kT,$$

$$(2,25a) \quad \frac{hR}{L} \ll kT \quad \left(\beta \ll \frac{1}{\alpha} \right): \quad \bar{K}(T) = \frac{kT}{2},$$

$$(2,25b) \quad \frac{hR}{L} \gg kT \quad \left(\beta \gg \frac{1}{\alpha} \right): \quad K(T) = \frac{\pi}{6} \left(\frac{kT}{\frac{hR}{L}} \right) kT.$$

Der Sinn dieser Ungleichungen geht daraus hervor, daß bei Vernachlässigung der Quanteneffekte die charakteristischen Frequenzen, die die Werte der Integrale in den Ausdrücken für $U(T)$ und $K(T)$ bestimmen, für $\alpha \gg 1$ die Werte $\omega_U = \eta_U / \sqrt{LC} = 1/RC$ bzw. $\omega_K = \eta_K / \sqrt{LC} = R/L$ (oder $\eta_U = 1/\alpha$ und $\eta_K = \alpha$) haben; die Frequenzen ω_U und ω_K sind gleichzeitig die Frequenzen, bei denen die Dämpfungskraft $R\dot{q}$ im Schwingkreis gleich der elastischen Kraft q/C bzw. dem Trägheitsglied $L\ddot{q}$ ist. Die Bedingung $\hbar/RC \ll kT$ (siehe (2.24a)) ist also die Bedingung für klassisches Verhalten des Schwingkreises hinsichtlich der elektrischen Energie $U(T)$. Diese Bedingung stimmt nicht überein mit der entsprechenden Bedingung für die magnetische Energie $K(T)$, die für $\alpha \gg 1$ durch Schwingungen mit noch höherer Frequenz $\omega_K = R/L \gg \omega_U = 1/RC$ bestimmt wird.

Interessanterweise geht selbst dann, wenn bei kleinem R der Schwingkreis sich völlig unklassisch verhält (d. h. $\hbar\omega_0 = \hbar/\sqrt{LC} \geq kT$), bei genügender Zunahme von R und unverändertem L und C die mittlere elektrische Energie gegen den klassischen Grenzwert $kT/2$, während die magnetische Energie gegen Null geht. Überhaupt betonen wir nochmals, daß die mittlere elektrische (potentielle) und magnetische (kinetische) Energie im Schwingkreis einander nicht gleich sind und wesentlich vom Widerstand R abhängen, selbst wenn dieser Widerstand für alle Frequenzen gleich ist. Die Abhängigkeit der Größen $U(T)$ und $K(T)$ von R verschwindet nur für $R \rightarrow 0$ oder im klassischen Grenzfall für $R = \text{const.}$

Der Grund für dieses Verhalten liegt darin, daß man im quantentheoretischen Fall im Gegensatz zum klassischen selbst für $R = \text{const}$ nicht berechtigt ist, die Energieänderung des Untersystems, die auf seiner Dämpfung beruht, zu vernachlässigen. Diese Schlußfolgerung ergibt sich unmittelbar aus der Unbestimmtheitsrelation für die Energie, nach der die Unbestimmtheit in der Energie des Untersystems $\Delta E \approx \hbar/\tau$ ist, wenn τ die Abklingzeit bedeutet (siehe LANDAU-LIFSHIZ, § 44). Eine Folge dieser allgemeinen Relation ist die Tatsache, daß ein Untersystem bei Vorhandensein einer Dämpfung keine diskreten Terme hat, und daß man nur von „verbreiterten“ quasistationären Zuständen sprechen kann, deren Breite nur bei schwacher Dämpfung kleiner als ihr gegenseitiger Abstand [für den Schwingkreis stimmt diese Bedingung der Kleinheit der Dämpfung mit der Bedingung (2.20) überein]. Ist dagegen die Dämpfung so stark, daß die Termbreite größer wird als der Abstand zwischen den Termen des ungestörten Systems, so ist es nicht mehr möglich, dieses System als unveränderlich anzusehen. So ist z. B. das Untersystem, in das ein Oszillator bei Vorhandensein einer starken Dämpfung übergeht, grundsätzlich verschieden von dem quantentheoretischen Oszillator, dessen Energie-terme diskret sind und durch den bekannten Ausdruck $E_n = \hbar\omega_0 (n + 1/2)$ gegeben werden. Die Unmöglichkeit, bei starker Dämpfung die Energieänderung des Untersystems zu vernachlässigen, führt dazu, daß man seine mittlere Energie nicht mehr mit den üblichen Formeln der Statistik errechnen kann. Hierauf beruht auch die Tatsache, daß die Mittelwerte der Energie U und K im quantentheoretischen Fall für $R \neq 0$ von den statistischen Ausdrücken (2.3) verschieden sind; diese galten für die mittlere potentielle und kinetische Energie eines Oszillators mit vernachlässigbar kleiner Dämpfung.

3. Die Anwendbarkeit thermodynamischer Methoden auf die elektrischen Schwankungserscheinungen

Die oben dargelegten Ergebnisse lassen eine Anzahl von Bemerkungen zu der kürzlich von G. S. GORELIK [GORELIK (1951)] aufgeworfenen Frage zu, „was man auf Grund lediglich der phänomenologischen Thermodynamik ohne Benutzung statistischer Überlegungen“ über die elektrischen Schwankungserscheinungen sagen könne. Daß eine solche Fragestellung gerechtfertigt ist, wird klar, wenn man die bekannte Fragwürdigkeit der Einteilung in Schwankungs- und Nichtschwankungserscheinungen bedenkt [GORELIK § 2 und LEONTOWITSCH § 34]. Beispielsweise wird die Wärmestrahlung im allgemeinen nicht als Schwankungserscheinung aufgefaßt, obwohl sie sich im Grunde gar nicht von den thermischen Schwankungen der elektromagnetischen Energie in einem elektrischen Schwingungskreis unterscheidet. Hieraus ergibt sich, daß man in der Tat auf Grund der Thermodynamik bestimmte Schlüsse über die Mittelwerte $\bar{U} = \bar{q}^2/2C$ und $K = L\bar{I}^2/2$ im Schwingungskreis ziehen kann, ähnlich wie das bekannte thermodynamische WIENSche Gesetz die mittlere spektrale Dichte u_ω der Strahlung kennzeichnet:

$$(3,1) \quad u_\omega(T, \omega) = T\Phi\left(\frac{T}{\omega}\right)\omega^2,$$

hierbei ist Φ eine Funktion des Verhältnisses T/ω . Die Gleichung (3,1) ergibt sich thermodynamisch aus der Formel von DOPPLER für die Frequenzänderung von Licht, das von einem bewegten Spiegel reflektiert wird, sowie der für eine isotrope Strahlung gültigen Beziehung $p = u/3$, wobei p der Lichtdruck und $u = \int_0^\infty u_\omega d\omega$ die gesamte Energiedichte der Strahlung ist¹⁾.

Wie die Formel von DOPPLER, ist auch der Ausdruck $p = u/3$ von sehr allgemeiner Natur. Beide ergeben sich sowohl in der klassischen Theorie des Elektromagnetismus als auch vom Standpunkt der Lichtquantenvorstellung. Das WIENSche Gesetz (3,1), das das Problem, eine Funktion $u_\omega(\omega, T)$ von zwei Variablen zu suchen, auf das Problem zurückführt, eine Funktion Φ einer Variablen zu finden, spielte eine wesentliche Rolle bei der Entwicklung der Theorie der Wärmestrahlung. Heutzutage bemüht man sich nicht mehr um eine besondere Begründung des WIENSchen Gesetzes, da es einfacher ist, gleich den richtigen Ausdruck für u_ω hinzuschreiben, d. h. das PLANCKsche Gesetz

$$u_\omega = \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3} \left(\frac{h\omega}{kT} - 1 \right)^{-1}.$$

Man kann die Wärmestrahlung als eine Gesamtheit von „Feldoszillatoren“ der mittleren Energie $E = \frac{h\omega}{e^{h\omega/kT} - 1}$ auffassen, wobei $\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$ die Anzahl der Oszillatoren im Frequenzintervall $d\omega$ ist. Hieraus geht hervor, daß die

¹⁾ Zur Ableitung der Formel (3,1) vergleiche z. B. [PLANCK]. Man schreibt diese Formel häufig in der zu (3,1) äquivalenten Form $u_\omega = \omega^3 \Phi'\left(\frac{\omega}{T}\right)$, wo Φ' eine unbekannte Funktion bedeutet.

Thermodynamik, angewandt auf einen einzigen Oszillator (Schwingkreis), statt des Ausdrucks (3,1) die Beziehung $\bar{E} = T\Phi(T/\omega)$ liefern muß, wobei ω die Eigenfrequenz des Oszillators ist¹⁾. Hierbei kann es sich, da wir uns auf das Beispiel der ungedämpften „Feldoszillatoren“ stützen, nur um ungedämpfte oder schwach gedämpfte Oszillatoren handeln, soweit man aus der Analogie schließen kann. Für einen ungedämpften Oszillator gilt aber der rein mechanische Virialsatz, nach dem die zeitlichen Mittelwerte \bar{U} und \bar{K} der potentiellen und kinetischen Energie einander gleich sind. Auf Grund des Gesagten kommen wir zu der Schlußfolgerung, daß im Fall eines hinreichend schwach gedämpften elektrischen Schwingkreises mit der Frequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ die Beziehung, die dem WIENSchen Gesetz (3,1) entspricht, folgende Form haben muß

$$(3,2) \quad \bar{U} = \bar{K} = T\Phi(\sqrt{LC} T).$$

Wie weiter unten gezeigt wird, läßt sich der Ausdruck (3,2) für den schwach gedämpften elektrischen Schwingkreis auch unmittelbar, ohne Benutzung der Analogie mit dem WIENSchen Gesetz ableiten. Jedoch bemühte sich G. S. GORELIK in seinem Artikel nicht, für die elektrischen Schwankungen ein Analogon zum WIENSchen Gesetz zu gewinnen; er versuchte nur auf thermodynamischem Wege das allgemeine Problem der Schwankungen in einem Schwingkreis mit beliebigem Widerstand zu behandeln. Außerdem wird bei GORELIK nur der Grenzfall des RC -Kreises betrachtet, d. h. eines Kreises, bestehend aus einem Kondensator und einem Widerstand, aber ohne Selbstinduktion. Dem Leser zuliebe führen wir hier kurz die entsprechenden Überlegungen von G. S. GORELIK an. Die mittlere Energie des RC -Kreises ist

$\bar{U} = \frac{q^2}{2C}$, die Arbeit der elektrischen Kräfte bei einer Kapazitätsänderung dC des Kondensators beträgt

$$\delta \bar{A} = - \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{q^2}{2C} \right) dC = \frac{q^2}{2C^2} dC,$$

und die thermodynamische Gleichung, die den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik wiedergibt, hat die Form:

$$(3,3) \quad T dS = d\bar{U} + \delta \bar{A} = d \left(\frac{q^2}{2C} \right) + \frac{q^2}{2C^2} dC.$$

Hieraus erhalten wir, indem wir $q^2 = q(T, C)$ setzen und die einander gleichen

Ableitungen $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial C}$ und $\frac{\partial^2 S}{\partial C \partial T}$ berechnen, für q die Gleichung

$$T \frac{\partial q}{\partial T} = C \frac{\partial q}{\partial C},$$

¹⁾ Auf den ersten Blick mag es sonderbar ausssehen, thermodynamische Ergebnisse für einen Oszillator, d. h. für ein Untersystem mit einem einzigen Freiheitsgrad erhalten zu wollen. Die Dinge liegen jedoch so, daß die Thermodynamik auf ein ideales Gas, bestehend aus Oszillatoren, anwendbar ist, und daß die Energie dieses Gases gleich der Summe der Energien der einzelnen Oszillatoren ist. Deshalb kann man letzten Endes auf thermodynamischem Wege auch Rückschlüsse über die Eigenschaften eines einzigen Oszillators erhalten, wie das im Text auch geschieht.

aus der hervorgeht, daß $\varphi(T, C) = \varphi(TC)$ ist und

$$(3,4) \quad \bar{U} = \frac{\overline{q^2}}{2C} = T\Phi(TC),$$

wobei $\Phi = \varphi/2CT$ eine unbekannte Funktion des Produkts CT ist. Das Ergebnis (3,4) bleibt unverändert bestehen, wenn man annimmt, daß die Energie im Schwingkreis nicht $\frac{\overline{q^2}}{2C}$, sondern $\frac{\overline{q^2}}{2C} + F(T)$ beträgt, wobei F eine unbekannte Funktion von T ist. Da bei einer Widerstandsänderung keine Arbeit am System geleistet wird, können die Größen $\overline{q^2}$ und F nicht von R abhängen. Dieser Schluß gilt allgemein für ein beliebiges System und folgt sofort aus (3,3), da beispielsweise bei einem adiabatischen Vorgang $\frac{\partial U}{\partial R} = 0$ ist, falls für $dR \neq 0$ gilt $\delta A = 0$, und die Energie demzufolge nicht von R abhängt.

Wir wenden uns nun dem Problem zu, die Energie $\frac{\overline{q^2}}{2C}$ durch die Parameter des Schwingkreises und die spektrale Dichte $w(\omega)$ im Gleichgewichtszustand auszudrücken; die letztere Dichte beträgt $w(\omega) = R(\omega)f(T, \omega)$. Dann erhalten wir für den RC -Kreis ($L = 0$) unter Berücksichtigung von (1,8) und (3,4):

$$(3,5) \quad \bar{U} = \frac{\overline{q^2}}{2C} = T\Phi(TC) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{CRf(T, \omega) d\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1}.$$

Im Fall eines frequenzunabhängigen Widerstandes R sehen wir, daß die rechte Seite der Gleichung (3,5) von T und dem Parameter CR abhängt, während die linke Seite von T und CT abhängt. Hieraus geht hervor, daß die Funktion $\Phi(CT)$ eine universelle Konstante $a/2$ ist, also

$$(3,6a) \quad \frac{\overline{q^2}}{2C} = \frac{a}{2} T.$$

Wegen (3,6a) kann das Integral in (3,5) nicht von RC abhängen, und daraus folgt, daß¹⁾:

$$(3,6b) \quad f = \frac{2}{\pi} a T, \quad a = \text{const},$$

¹⁾ Einen strengen Beweis für diese Behauptung findet man bei GORELIK. Ein derartiges Ergebnis ist plausibel, wie daraus hervorgeht, daß wegen (3,6a) die Beziehung (3,5)

sich in der Form $aT/2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f(T, \xi/CR) d\xi}{\xi^2 + 1}$ schreiben läßt, d. h. daß ihre rechte Seite

nicht von CR abhängen kann; das stellt eine sehr einschränkende Bedingung für die Form der Funktion $f(T, \xi/CR)$ dar. Setzen wir $f(T, \xi/CR) = f(T)$, so erhalten wir (3,6b). Die Eindeutigkeit dieser Lösung ergibt sich aus der Theorie der Integralgleichungen.

d. h. es kommt die klassische Formel von NYQUIST (1,9) heraus, denn die universelle Konstante α läßt sich für irgendeinen beliebigen Schwingkreis bestimmen und ist offenbar gleich der BOLTZMANN-Konstante k .

Die Ergebnisse (3,6), die GORELIK erhält, sind sehr überraschend, denn sie sind rein klassisch und widersprechen der quantentheoretischen NYQUIST-Formel (2,3), obwohl man bei ihrer Ableitung scheinbar keinerlei klassische Voraussetzungen gemacht hat. In der Tat müssen die thermodynamischen Beziehungen gleichermaßen im klassischen wie im quantentheoretischen Gebiet gelten.

Was die Benutzung des Energieausdrucks $\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \int \frac{C R f d\omega}{C^2 R^2 \omega^2 + 1}$ angeht, so ist er weit über die Grenzen der klassischen Theorie hinaus anwendbar (siehe Abschnitt 2).

Es steht also zweifelsfrei fest, daß die oben gegebene Ableitung der Formel (3,6) nicht thermodynamisch ist, sondern in verborgener Form irgendwelche weitergehende Behauptungen enthält, die der Anwendung der klassischen Statistik gleichwertig sind. Auf Grund des in den Abschnitten 1 und 2 Gesagten sieht man leicht, worin diese Voraussetzungen bestehen. Aus der quantentheoretischen NYQUIST-Formel geht hervor, daß die mittlere Energie in einem Schwingkreis im allgemeinen von dem Widerstand R dieses Schwingkreises abhängt (vergleiche den Schluß des Abschnitts 2). Indessen erhält man, wenn man die Thermodynamik auf irgendeinen Schwingkreis anwendet, wie dies oben für den RC -Schwingkreis geschah, stets Ausdrücke für die Energien \bar{U} und \bar{K} , die von dem Widerstand R unabhängig sind. Der Grund für diesen Widerspruch liegt darin, daß im Fall eines Schwingkreises oder eines beliebigen Systems mit endlichem Widerstand die thermodynamischen Beziehungen im allgemeinen nicht anwendbar sind. Die gesamte Thermodynamik wie auch die Statistik bezieht sich auf quasiabgeschlossene Systeme, deren Wechselwirkungsenergie mit dem Thermostaten vernachlässigt werden kann. Nur unter dieser Voraussetzung gilt, wie schon in Abschnitt 1 betont, die GIBBSsche kanonische Verteilung, aus der man auch die thermodynamische Grundgleichung erhält. Entsprechend liegen die Dinge auch bei der Entwicklung einer von der Statistik unabhängigen Thermodynamik: auch hier ist es unmöglich, ohne die Voraussetzung der Additivität der Energien weiterzukommen. Außerdem ist die Dämpfung als solche die Folge einer Wechselwirkung, die zu einem Energieaustausch zwischen System und Thermostat führt, wobei die Dämpfung dann als groß angesehen wird, wenn die Geschwindigkeit dieses Austausches mit der Energieaustauschgeschwindigkeit zwischen den Teilen dieses Systems selbst vergleichbar oder gar größer wird als diese [siehe Bedingung (2,22), die besagt, daß $R/L \gg 1/VC$ ist]. In unserem Fall eines Systems, auf das die Thermodynamik angewendet wird, besteht in Anwendung der Bezeichnungsweise des Abschnitts 1 das Untersystem aus dem Pendel oder dem elektromagnetischen Feld im Kondensator und in der Selbstinduktionsspule, umfaßt jedoch nicht das das Pendel umgebende Gas oder das Material der Zuleitungen (siehe Abschnitt 1). Ist die Dämpfung des Systems stark, so ist die Energie des Gesamtsystems (Pendel + Gas, Schwingkreis als Ganzes) im allgemeinen nicht gleich der Summe der Energie des

isolierten Untersystems und seiner Umgebung, und die Anwendung der Thermodynamik auf das Untersystem ist unmöglich.

Auf das System als Ganzes, das als in einem äußeren Thermostaten befindlich angesehen wird und mit dem Thermostaten in schwacher Wechselwirkung steht, läßt sich die Thermodynamik selbstverständlich anwenden. In diesem Fall aber kann die Anwendung der thermodynamischen Gleichungen zu keinem konkreten Ergebnis führen, da die Energie des Systems eine unbekannte Funktion von T und den Systemparametern ist, unter denen sich auch die Parameter C und L befinden können [hier handelt es sich wieder darum, daß in Anwesenheit einer starken Wechselwirkung des Untersystems mit seiner Umgebung die Energie des Gesamtsystems nicht gleich der Summe $q^2/2C + LI^2/2$ der Energien der Untersysteme und der vom Zustand des Untersystems abhängigen Funktion $F(T)$ ist].

Unabhängig davon, ob wir die Thermodynamik auf das Untersystem oder das System als Ganzes anwenden, sind also die Ergebnisse (3,6), die für den Grenzfall eines sehr stark gedämpften Schwingkreises (RC -Schwingkreis) gewonnen wurden, tatsächlich nicht rein thermodynamisch, sondern ergeben sich nur unter der zusätzlichen, sehr einschneidenden Voraussetzung, daß die Wechselwirkungsenergie gleich Null sei, obwohl das Untersystem stark gedämpft ist. Im Bereich der Quantentheorie ist eine derartige Annahme ganz unmöglich, da sie der Unbestimmtheitsrelation für die Energie widerspricht. In der klassischen Theorie ist die Vernachlässigung der Wechselwirkungsenergie möglich, wenn die Einwirkung des umgebenden Mediums auf das Untersystem in Form momentaner Stöße erfolgt. In diesem Fall sind, wie aus dem in Abschnitt 1 Gesagten hervorgeht, die Formeln (3,6a) und (3,6b) gültig. Hierdurch ist das Paradoxon vollständig aufgelöst.

Als einen Widerspruch in dem Ergebnis (3,6b) von G. S. GORELIK kann man auf den ersten Blick auch die Tatsache ansehen, daß er auch unter der Voraussetzung momentaner Stöße die Formel von NYQUIST ohne das gewöhnlich verwendete statistische Ergebnis $\bar{U} = \bar{K} = kT/2$ erhält. Wie jedoch aus den weiter unten folgenden Bemerkungen hervorgeht, folgt der Satz über die Gleichverteilung der Energie über die Freiheitsgrade aus der Voraussetzung momentaner Stöße, d. h. der Unabhängigkeit der Funktion u von der Frequenz ω . In diesem Punkt gibt es also keinerlei Widerspruch.

Für den gedämpften Schwingkreis ist es also unmöglich, irgendwelche rein thermodynamischen Schlußfolgerungen, d. h. Schlußfolgerungen, die nicht von dem Charakter der Wechselwirkungskräfte im System, seinem klassischen Verhalten usw. abhängen, zu ziehen¹⁾. Dagegen kann man diese Schluß-

¹⁾ Für den gedämpften Schwingkreis mit frequenzunabhängigem Widerstand R führt unter der Voraussetzung, daß bei jedem Wert von R die Wechselwirkungsenergie des betrachteten Untersystems mit seiner Umgebung vernachlässigt oder mit anderen Worten, daß die Energie des Gesamtsystems in Form der Summe $q^2/2C + F(T)$ dargestellt werden kann, die Thermodynamik zu den Formeln (3,6). Dies beweist G. S. GORELIK für den RC -Schwingkreis (siehe weiter oben). Wie der Verfasser erfuhr, erhielt M. L. LEWIN dasselbe Ergebnis auch für einen beliebigen RC -Schwingkreis (in diesem Punkt ist also die Vernachlässigung der Selbstinduktion, die im allgemeinen, wie in der folgenden Bemerkung angedeutet, bei der Behandlung der thermischen Schwankungen unzulässig ist, unwesentlich). Dieses Ergebnis kann jedoch nicht als thermodynamisch im üblichen

folgerungen für einen hinreichend schwach gedämpften Schwingkreis ziehen und namentlich die Beziehung (3,2) erhalten.

Die Arbeit $\delta \bar{A}$, die mit einer Kapazitätsänderung dC und einer Selbstinduktionsänderung dL des Schwingkreises verbunden ist, beträgt:

$$\delta \bar{A} = -\frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{\bar{q}^2}{2C} \right) dC + \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{L \bar{I}^2}{2} \right) = \frac{\bar{q}^2}{2C^2} dC + \frac{\bar{I}^2}{2} dL,$$

denn die potentielle Energie des elektrischen Feldes ist $U = \bar{q}^2/2C$, und die Potentialfunktion, die das magnetische Feld liefert, ist gleich $\frac{L \bar{I}^2}{2}$. Die Energie im Schwingkreis ist $\bar{E} = \bar{U} + \bar{K} = \bar{q}^2/2C + \frac{L \bar{I}^2}{2}$, ferner folgt für einen hinreichend schwach gedämpften Schwingkreis — solche werden auch hier ausschließlich betrachtet, da man unter dieser Voraussetzung ohne weitere Annahmen die Thermodynamik anwenden kann — aus dem Virialsatz, der rein dynamischen Charakter trägt, daß $\bar{K} = \bar{U}$ ist¹⁾. Benutzen wir der Bequemlich-

Sinne dieses Wortes angesehen werden. Das folgt insbesondere daraus, daß man zur Formel (3,6) auch ohne Benutzung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und gleichzeitig ohne zusätzliche statistische Voraussetzungen kommen kann. Tatsächlich ist die Vernachlässigung der Wechselwirkungsenergie bei starker Dämpfung möglich, falls die Stöße momentan sind, und in diesem Fall ist die Funktion $w = Rf$ frequenzunabhängig (siehe Abschnitt 1). Deshalb erhalten wir, da voraussetzungsgemäß R konstant ist, aus den Ausdrücken für \bar{K} und \bar{U} [siehe (1,12)] $\bar{K} = \bar{U} - \frac{\pi}{4} f(T)$, wobei wegen (1,6) $f(T, \omega) = f(T)$ eine universelle Funktion von T ist. Man erhält also ein Ergebnis, das dem Satz von der Gleichverteilung der Energie über die Freiheitsgrade äquivalent ist, und hat nur noch zu zeigen, daß $f(T) = \text{const} \cdot T$ ist, wo T die absolute thermodynamische Temperatur ist. Zu diesem Zweck betrachten wir ein ideales einatomiges Gas, für das einerseits wegen der Universalität der Funktion f ebenfalls $\bar{K} = \frac{\pi}{4} f(T)$ ist und andererseits nach dem Virialsatz die mittlere Energie im Volumen V den Wert $\bar{E} = N \bar{K} = \frac{3}{2} pV$ hat, wobei N die Teilchenzahl und p der Druck ist. Ferner ist für ein ideales Gas, wie aus dem Experiment folgt, $pV = \text{const} \cdot T$ und wir gelangen somit, indem wir nur die Eigenschaften des idealen Gases benutzen, zur Formel (3,6b) $f = \text{const} \cdot T$, aus der sich auch die Formel (3,6a) ergibt.

Die Ableitung der NYQUIST-Formel von G. S. GORELIK ist, wenn man sie auf den RCL -Schwingkreis ausdehnt, eine Methode zur Gewinnung der universellen Funktion f durch Betrachtung eines Modellsystems (siehe Abschnitt 1), für das $R = \text{const}$ ist und bei dem für ein beliebiges R die Energie \bar{U} und \bar{K} nicht von R abhängen. Da ein solches Modellsystem nur im klassischen Bereich realisiert werden kann, kann man mit seiner Hilfe nur die klassische NYQUIST-Formel erhalten.

¹⁾ Diese Beziehung folgt für $R \rightarrow 0$ sofort aus den Integralausdrücken, die \bar{K} und \bar{U} in Abhängigkeit von den Parametern L , C , R und der Funktion f darstellen [siehe (2,17)], und gilt sowohl im klassischen als auch im quantentheoretischen Bereich. Der entsprechende Beweis für den Fall des Oszillators ist gleichwertig dem Nachweis der Gleichheit von \bar{K} und \bar{U} auf Grund des allgemeineren Virialsatzes.

Wir bemerken ferner, daß, da im klassischen Bereich für $R = \text{const}$ für alle R $\bar{U} = \bar{K} = kT/2$ gilt, bei der Untersuchung der elektrischen Schwingungserscheinungen im all-

keit halber diesen Umstand von Anfang an und berücksichtigen die oben angegebenen Ausdrücke für δA und E , so können wir die thermodynamische Gleichung in der Form

$$(3,7) \quad T dS = \overline{dE} + \overline{\delta A} = d(L\varphi) + \frac{L}{2C} \varphi dC + \frac{\varphi}{2} dL,$$

schreiben, wobei $\varphi(T, L, C) = \overline{I^2}$ ist.

Setzen wir nunmehr die Ableitungen $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial C}$ und $\frac{\partial^2 S}{\partial C \partial T}$ usw. einander gleich, so erhalten wir

$$(3,8) \quad \left\{ \begin{array}{l} L \frac{\partial \varphi}{\partial L} - C \frac{\partial \varphi}{\partial C} + \varphi = 0, \\ T \frac{\partial \varphi}{\partial T} - 2L \frac{\partial \varphi}{\partial L} - 3\varphi = 0, \\ T \frac{\partial \varphi}{\partial T} - 2C \frac{\partial \varphi}{\partial C} - \varphi = 0. \end{array} \right.$$

Eine Lösung dieses Systems ist $\varphi = \overline{I^2} = \frac{2T}{L} \Phi(\sqrt{LC} T)$, wo Φ eine willkürliche Funktion ist. Hiermit erhalten wir für $U = \overline{K} = L\overline{I^2}/2$ die Formel (3,2), wie auch zu erwarten war. Da (3,2) jetzt auf eine unabhängige Weise abgeleitet worden ist, können wir damit leicht zum WIENSchen Gesetz (3,1) gelangen.

Unter Berücksichtigung von (3,2) kann man beispielsweise den Ausdruck für die potentielle Energie eines schwach gedämpften Schwingkreises folgendermaßen schreiben [siehe (2,17)]:

$$\bar{U} = T\Phi(\sqrt{LC} T) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{CR f(\omega, T) d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2}.$$

Hieraus finden wir sofort, wie auch in den Abschnitten 1 und 2 bei der Ableitung der NYQUIST-Formel,

$$f(\sqrt{LC}, T) = \frac{4}{\pi} T\Phi(\sqrt{LC} T)$$

oder, indem wir \sqrt{LC} durch $1/\omega$ ersetzen,

$$(3,9) \quad f(\omega, T) = \frac{4}{\pi} T\Phi\left(\frac{T}{\omega}\right).$$

gemeinen der RC -Schwingkreis gar nicht behandelt werden kann, weil man bei ihm die Selbstinduktion und die magnetische Energie vernachlässigen müßte. Das liegt daran, daß man, wie aus Gleichung (1,10) hervorgeht, die Selbstinduktion nur dann vernachlässigen kann, wenn die Frequenz der erzwungenen Spannung der Ungleichung $\omega \ll R/L$ genügt. Dagegen ist im Fall der thermischen Schwankungen das Spektrum der Spannung \mathcal{E} nicht von vornherein bekannt und erstreckt sich faktisch bis zu sehr hohen Frequenzen, die der angegebenen Ungleichung nicht mehr genügen.

Dieses Ergebnis steht natürlich in voller Übereinstimmung mit der quantentheoretischen NYQUIST-Formel (2,3), aus der, ebenso wie durch Vergleich der Ausdrücke (3,2) und (2,2), folgt

$$T\Phi\left(\frac{T}{\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\right).$$

Noch irgendwelche weiteren Ergebnisse rein thermodynamisch, ohne zusätzliche Voraussetzungen zu gewinnen, ist unmöglich. Was die Formeln (3,2) und (3,9) angeht, so besitzen sie höchstens pädagogischen Wert, da sich die bedeutend weitergehende quantentheoretische NYQUIST-Formel (2,3) ohne Heranziehung der erwähnten thermodynamischen Beziehungen einfacher ableiten läßt und tatsächlich auch so abgeleitet wurde.

4. Die elektrischen Schwingungserscheinungen in der Umgebung von Phasenumwandlungspunkten zweiter Ordnung in elektrostriktiven Materialien, Ferromagnetika und Supraleitern

Im Zusammenhang mit den oben erörterten Fragen wollen wir uns auch mit den besonderen Eigenschaften der elektrischen Schwingungserscheinungen in der Umgebung von Phasenumwandlungspunkten zweiter Ordnung, die auch als CURIE-Punkte bezeichnet werden, befassen. Dieser Fall ist deshalb interessant, weil in der Umgebung eines CURIE-Punktes die Schwankungen eines Parameters, der den Charakter des Überganges bestimmt, stark zunehmen und formal sogar gegen Unendlich gehen.

Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, gehen wir gleich auf einen konkreten Fall ein, auf den Phasenübergang in elektrostriktiven Materialien. In diesem Fall hat das thermodynamische Potential in der Umgebung des CURIE-Punktes die Form [GINSBURG (1949)]

$$(4,1) \quad \Phi = \Phi_0 + \alpha P^2 + \frac{\beta}{2} P^4,$$

wobei P die elektrische Polarisierung ist und Φ_0 , α und β Funktionen von Temperatur und Druck sind, Abwesenheit von elektrischen Feldern angenommen wird und der Kristall der Einfachheit halber mit einer einzigen Elektrostriktionsachse versehen sein soll, wie z. B. Seignettesalz. Im CURIE-Punkt (bei $T = \Theta$) ist der Koeffizient $\alpha_\Theta = 0$, dagegen $\beta_\Theta > 0$; in der Nähe des CURIE-Punktes kann man setzen $\alpha = \alpha'_\Theta (T - \Theta)$ und $\beta = \beta_\Theta$,

wobei $\alpha'_\Theta = \left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_\Theta > 0$ ist, und somit $\alpha > 0$ für $T > \Theta$. Für $T > \Theta$ ist im thermodynamischen Gleichgewicht $P = 0$, dagegen für $T < \Theta$ mit $\alpha < 0$ im Gleichgewichtszustand $P^2 = P_0^2 = -\alpha/\beta > 0$.

Wie aus der Theorie der thermodynamischen Schwankungen bekannt ist [LANDAU-LIFSHIZ, Statistische Physik, Kapitel 12, und LEONTOWITSCH, § 30], ist die Wahrscheinlichkeit für die Schwankung irgendeiner Größe η proportional $e^{-\Delta\Phi/kT}$, wobei $\Delta\Phi$ die Änderung des thermodynamischen Potentials ist, die

auf der Änderung $\Delta\eta$ der Größe η bei einer Volumänderung ΔV beruht (Temperatur und Druck des Körpers sehen wir als konstant an). In unserem Fall ist $\eta = P$ und etwa oberhalb des CURIE-Punktes $\Delta\eta = P$ und $\Delta\Phi = = \alpha P^2 \Delta V$ (das Glied $\beta P^4/2$ kann man vernachlässigen, jedenfalls solange die Schwankungen nicht allzu groß sind; das Potential beziehen wir auf die Volumeneinheit). Wir sehen daraus, daß das mittlere Quadrat der Polarisationschwankungen oberhalb des CURIE-Punktes folgenden Wert hat:

$$(4,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{P^2} = \frac{kT}{2\alpha\Delta V} = \frac{kT}{2\alpha_\Theta(T-\Theta)\Delta V}, \\ T > \Theta. \end{array} \right.$$

Bei Annäherung an den CURIE-Punkt ($T \rightarrow \Theta$) wächst, wenn man von dem Ausdruck (4,2) ausgeht, die Größe $\overline{P^2}$ unbeschränkt. Das kann nicht bei jedem Phasenübergang zweiter Ordnung eintreten, bei dem irgendein anderer oder auch mehrere Parameter die Rolle des P^2 spielen. Diese Parameter können die Bedeutung des Quadrats der spontanen Magnetisierung M^2 (Ferromagnetika), der Konzentration der Supraleitungselektronen n_s (Supraleiter), der Dichte des superfluiden Anteils der Flüssigkeit ϱ_s (Helium II), das Quadrat des Ordnungsgrades η^2 (geordnete Legierungen) usw. haben¹⁾. Das Vorliegen großer Schwankungen der Größen P^2 , M^2 , n_s usw. oberhalb des CURIE-Punktes ist um so interessanter, als in diesem Gebiet die Existenz nicht nur stabiler, sondern auch metastabiler, einem relativen Minimum des thermodynamischen Potentials entsprechender Keime der geordneten Phase (der Phase, die unterhalb des CURIE-Punktes stabil ist) unmöglich ist; hierauf beruht auch die Unmöglichkeit einer Überhitzung bei Phasenübergängen zweiter Ordnung. Wie gesagt, können aber schnell veränderliche „Schwankungskeime“ der geordneten Phase auch oberhalb des CURIE-Punktes auftreten; diese Erscheinung nimmt bei Annäherung an den CURIE-Punkt bedeutend an Intensität zu.

Das Anwachsen der Schwankung des charakteristischen Parameters in der Nähe der CURIE-Punkte entspricht im gewissen Maße dem Anwachsen der Schwankungen in der Nähe des kritischen Punktes im Diagramm des Gleichgewichts Flüssigkeit-Dampf. Ähnlich wie diese letztere Erscheinung zu der kritischen Opaleszenz führt, gibt das Anwachsen der Schwankungen des geordneten Zustandes in der Umgebung der CURIE-Punkte Anlaß zu einer anomalen Streuung des Röntgenlichtes [LANDAU (1937)].

Im Fall der Übergänge zweiter Ordnung, die auf Ordnungserscheinungen beruhen, ändern sich die elektrischen Eigenschaften der Substanz nur indirekt, und hinsichtlich der elektrischen Schwankungserscheinungen haben diese Übergänge keine besondere Bedeutung. Im Fall der elektrostriktiven Materialien, Ferromagnetika und Supraleiter sind jedoch „elektromagnetische“ Parameter charakteristisch und starken Schwankungen unterworfen, nämlich

¹⁾ Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, sprechen wir nur von Übergängen zweiter Ordnung. Tatsächlich liegen sämtliche Anomalien (wenn auch im allgemeinen in geringerem Maße) auch bei Übergängen erster Ordnung vor, und zwar in der Nähe der sogenannten λ -Punkte oder kritischen CURIE-Punkte [LANDAU-LIFSHIZ, Statistische Physik, § 134 und GINSBURG (1949), § 2].

die Polarisation P , die Magnetisierung M und die mit der Eindringtiefe eines Magnetfeldes zusammenhängende Konzentration n_s der Supraleitungselektronen [GINSBURG (1950)].

Wie drücken sich diese Schwankungen im Experiment aus? Welches sind die Besonderheiten für elektrische Schwankungen in der Nähe der CURIE-Punkte in elektrostriktiven Materialien, Ferromagnetika und Supraleitern? Auf diese naheliegenden Fragen müssen wir eine Antwort finden, obwohl dies auf den ersten Blick sehr schwierig aussieht.

In der Tat: Angenommen, wir wollen die Schwankung des elektrischen Moments eines elektrostriktiven Probekörpers berechnen. Die Schwankung des Moments des Versuchskörpers als Ganzes setzt sich zusammen aus den Schwankungen der Momente seiner einzelnen Teile. In großer Entfernung vom CURIE-Punkt werden diese Schwankungen durch den Ausdruck (4,2) bestimmt, in der Umgebung des CURIE-Punktes jedoch wird die Formel (4,2) ungültig, und man hat in erster Linie die Korrelation der Schwankungen in den verschiedenen Volumteilen zu berücksichtigen (zu diesem Zweck hat man den Ausdruck (4,1) durch ein Glied $\gamma (\nabla P)^2$ zu ergänzen [LANDAU-LIFSHIZ, Statistische Physik; LANDAU (1937)]. Schon hieraus ergibt sich, daß die Berechnung der Schwankungen des elektrischen Moments des Versuchskörpers als Ganzes auf diesem Wege recht schwierig sein wird.

Zum Glück braucht man diese Aufgabe auch nicht zu lösen, oder, wenn man so will, sie ist bereits gelöst.

In der Tat führt die Bestimmung der Schwankungen des elektrischen Moments einer elektrostriktiven Substanz oder des magnetischen Moments eines Ferromagnetikums letzten Endes auf die Bestimmung der Schwankungen der Ladung in einem Kondensator, in dem sich der elektrostriktive Körper befindet, oder auf die Schwankungen des Stromes in einer Spule, die das Ferromagnetikum umgibt, usw. Die Schwankungen q^2 und I^2 oder die mit ihnen zusammenhängende Größe $w(\omega)$ sind aber im thermodynamischen Gleichgewichtszustand bereits bestimmt, und zwar in allgemeiner Form, unabhängig von den konkreten Eigenschaften der Stoffe, aus denen der Schwingkreis besteht; die elektrischen Schwankungen in der Umgebung der CURIE-Punkte werden also genau so wie in anderen Fällen durch die gewöhnliche NYQUIST-Formel

$$w = \frac{2}{\pi} R(\omega) k T^1$$
 bestimmt. Wenn also die Schwankungen in der Umgebung der CURIE-Punkte irgendeine Anomalie aufweisen, so wird diese vollständig durch eine entsprechende Anomalie im Verlaufe von $R(\omega) = \text{Re } Z$ gekennzeichnet. Daraus folgt, daß man durch Messung der elektrischen Schwankungen im Gleichgewicht in der Umgebung der CURIE-Punkte keine irgendwie

¹⁾ Wir beschränken uns hier auf den klassischen Fall. Außerdem muß nochmals betont werden, daß die Formel von NYQUIST nur Schwankungen im thermodynamischen Gleichgewicht beschreibt. Die elektrischen Schwankungen im Nichtgleichgewicht, die im Prinzip ebenfalls eine Rolle spielen können, erfordern eine ganz unabhängige Behandlung. Versuche, unter den besonderen Bedingungen, wie sie in der Umgebung von Phasenumwandlungspunkten vorliegen, solche Schwankungen im Nichtgleichgewicht zu beobachten, wären von großem Interesse.

interessanten Angaben erhalten kann, außer der Größe $R(\omega)$, die man wesentlich einfacher unmittelbar messen kann.

Um das Bild abzurunden, deuten wir das Verhalten der Funktion $R(\omega)$ in der Umgebung der CURIE-Punkte an.

Handelt es sich um einen Kondensator mit einem elektrostriktiven Dielektrikum, so kann man die Impedanz Z leicht bestimmen, indem man die Bewegungsgleichung für die gesamte Polarisierung P benutzt [GINSBURG (1949), § 3]; (wir beschränken uns auf den Fall $T > \Theta$):

$$(4,3) \quad 2\delta P + 2\alpha P = E_0 e^{i\omega t} = E,$$

dabei ist α derselbe Koeffizient wie in (4,1), E die elektrische Feldstärke, δ der Koeffizient, der die Verluste bestimmt; das Glied mit \dot{P} ist vernachlässigt, was man bei hinreichend niedrigen Frequenzen tun kann. Ferner ist definitionsgemäß $P = \frac{\epsilon' - 1}{4\pi} E \approx \frac{\epsilon'}{4\pi} E$ (wegen $|\epsilon'| \gg 1$), wo $\epsilon' = \epsilon_1 - i\epsilon_2 = \epsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ die komplexe Dielektrizitätskonstante ist (ϵ reelle Dielektrizitätskonstante, σ effektive Leitfähigkeit). Gleichzeitig ergibt sich aus (4,3), daß

$$(4,4) \quad P = \frac{E}{2\delta i\omega + 2\alpha} \text{ ist, also}$$

$$\epsilon' = \frac{2\pi}{\alpha + i\delta\omega}; \quad \epsilon_1 \equiv \epsilon = \frac{2\pi\alpha}{\alpha^2 + \delta^2\omega^2}; \quad \epsilon_2 \equiv \frac{4\pi\sigma}{\omega} = \frac{2\pi\delta\omega}{\alpha^2 + \delta^2\omega^2};$$

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\delta\omega}{\alpha}.$$

Wir sehen, daß die Größen ϵ_1 , ϵ_2 und $\operatorname{tg} \delta'$ in der Umgebung der CURIE-Punkte in charakteristischer Weise von der Temperatur abhängen, da $\delta = \text{const}$ und $\alpha = \alpha_\Theta (T - \Theta)$ ist. Jedoch weist der Realteil der Impedanz $R(\omega)$ bei $T \approx \Theta$ keinerlei „anomalen“ Verlauf auf, denn die Impedanz eines Kondensators mit einem elektrostriktiven Dielektrikum ist

$$(4,5) \quad Z = \frac{1}{i\omega C'} = \frac{4\pi d}{i\omega \epsilon' S} = \frac{2\delta d}{S} - i\frac{2\alpha d}{\omega S}, \quad R = \frac{2\delta d}{S} = \text{const},$$

dabei ist S die Fläche einer Kondensatorplatte und d der Plattenabstand [zu (4,5) gelangt man auch unmittelbar von (4,3) aus, da $SP = I$, $\mathcal{E} = Ed$ und der Widerstand $R = 2\delta d/S$, d. h. 2δ der spezifische Widerstand ist].

Im Fall der Ferromagnetika liegt es nahe, eine ringförmige ferromagnetische Probe zu betrachten, die sich in einer ebenso geformten Spule befindet. Die Impedanz dieser Spule ist proportional der komplexen magnetischen Permeabilität μ' der Probe. Der Wert μ' seinerseits wird durch Gleichung (4,3) bestimmt, in der man P durch die Magnetisierung M und E durch das Magnetfeld H zu ersetzen hat. Man erhält dadurch für $\mu' = \mu_1 - i\mu_2$ Formeln, die

(4,4) analog sind; $\operatorname{Re} Z = R(\omega)$ ist proportional $\mu_2 - \frac{2\pi\delta\omega}{\alpha^2 + \delta^2\omega^2}$ und hängt von T ab, wobei diese Abhängigkeit (bei kleinem δ) sehr stark sein kann.

Im Fall der Supraleiter bestimmt der charakteristische Parameter — die Konzentration n_s der Supraleitungselektronen — die Eindringtiefe des Magnetfeldes in den Supraleiter und ebenso die Selbstinduktion der Spule auf den supraleitenden Kern. Eine Messung des Rauschens in dieser Spule ist aber ohne besondere Bedeutung, und zwar um so mehr, als dieses Rauschen sehr schwach sein muß, sowohl wegen der Kleinheit von T als auch wegen der unbedeutenden Verluste in Supraleitern bei niedrigen Frequenzen.

Trotzdem sind im Fall der Supraleiter die durchgeführten Überlegungen über die Schwankungen in der Nähe der CURIE-Punkte von einem ganz anderen Standpunkt aus interessant. Es handelt sich darum, daß bei der theoretischen Analyse des Verhaltens der Supraleiter sowohl in konstanten als auch in Hochfrequenzfeldern bisher stets implizit oder explizit angenommen wurde [GINSBURG (1950, 1951)], daß oberhalb des Übergangspunktes (im normalen Zustand) die Eigenschaften des Metalls sich in nichts von den Eigenschaften von Nichtsupraleitern unterscheiden. Diese Annahme, die für die gewöhnlich behandelten Probleme unwesentlich ist, wird durch die Tatsache bekräftigt, daß es im Gebiet oberhalb des Umwandlungspunktes keine Anomalie der elektrischen Leitung gibt; sie wird im Fall eines konstanten Feldes nicht angezweifelt, da der supraleitende Zustand bei $T > T_k$ nicht einmal als metastabiler Zustand existieren kann ($T_k \equiv \Theta$ ist der Umwandlungspunkt in den supraleitenden Zustand bei Abwesenheit eines Magnetfeldes). Schwankungen der Größe n_s müssen aber auch oberhalb von T_k vorhanden sein und damit sozusagen den Übergang in den supraleitenden Zustand vorbereiten. Das Vorhandensein dieser Schwankungen muß auf die Eigenschaften der supraleitenden Metalle oberhalb des Umwandlungspunktes T_k von Einfluß sein. In dieser Hinsicht hat man in erster Linie den Einfluß der Schwankungen von n_s auf die komplexe Dielektrizitätskonstante ϵ' des Metalls zu klären, für die man bei $T > T_k$ gewöhnlich denselben Wert annimmt wie für nichtsupraleitende Metalle. Selbstverständlich kann man im konstanten Feld keinen Einfluß der schnellveränderlichen Schwankungen von n_s auf ϵ' erwarten, im Hochfrequenzfeld könnten sie sich jedoch geltend machen. Ebenso ist möglich, daß im normalleitenden Zustand der Einfluß der Schwankungen von n_s auf den Wert von ϵ' praktisch vollständig durch den Hauptbeitrag zu ϵ' , den die gewöhnliche Leitfähigkeit stellt, verdeckt wird; diese ist in den betrachteten Fällen (reine Metalle bei tiefen Temperaturen) besonders groß. In diesem Zusammenhang ist die Bemerkung besonders interessant, daß eine Erscheinung der „Vorbereitung“ des supraleitenden Überganges schon beobachtet wurde, wenn man den entsprechenden Experimenten Glauben schenkt, obwohl bis heute keine Deutung gelang: wir denken an das anomale Verhalten der thermoelektrischen Eigenschaften eines Metalls, die in einem Intervall von einigen Zehntel Grad oberhalb von T_k auftraten [CASIMIR und RADEMAKERS (1947); GINSBURG (1951)].

Ob diese Erscheinung, deren Existenz noch nicht als zuverlässig gesichert angesehen werden kann (bei STEELE wurde sie nicht beobachtet), mit Schwankungen von n_s bei $T > T_k$ zusammenhängt, ist völlig unklar, ebenso wie auch das ganze Problem der Rolle dieser Schwankungen für die anderen Vorgänge in Supraleitern unklar ist.

Wir hoffen, an anderer Stelle noch einmal auf diese Fragen zurückkommen zu können, erinnern hier aber nur deshalb daran, um an diesem Beispiel ebenso wie an dem der Schwankungen in elektrostriktiven Körpern und Ferro-magnetika den Zusammenhang der in den Abschnitten 1 bis 3 erörterten Fragen der elektrischen Schwankungen in Schwingkreisen mit einer Reihe ganz anderer physikalischer Erscheinungen aufzeigen zu können.

Anhang: Ableitung der quantentheoretischen NYQUIST-Formel nach CALLEN und WELTON

Die von CALLEN und WELTON angegebene Herleitung der quantentheoretischen NYQUIST-Formel (2,3) [CALLEN und WELTON (1951)] stützt sich auf den Vergleich des üblichen quantenmechanischen Ausdrucks für $\frac{R(\omega)}{|\overline{Z(\omega)}|^2}$, der in Abschnitt 2 angegeben wurde [siehe (2,14)], mit dem unabhängig bestimmten Wert für das mittlere Quadrat des Stromes $\overline{Q^2} = \overline{I^2}$ im thermodynamischen Gleichgewicht und selbstverständlich bei Abwesenheit äußerer Spannungen.

Das System befinde sich in einem stationären Zustand n , in dem die Energie E_n betrage und $\Psi = \Psi_n$ sei [siehe (2,4)]. In diesem Zustand verschwindet der Strom I , d. h. der Mittelwert des Operators der Stromstärke $\dot{Q} = \frac{i}{\hbar} (H_0 Q - Q H_0)$, der die Form $\langle E_n | \dot{Q} | E_n \rangle = \int \Psi_n^* \dot{Q} \Psi_n dx$ hat¹⁾. Der Mittelwert der Größe \dot{Q}^2 ist

$$\begin{aligned} (A, 1) \quad \langle E_n | \dot{Q}^2 | E_n \rangle &= \sum_m \langle E_n | \dot{Q} | E_m \rangle \langle E_m | \dot{Q} | E_n \rangle = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_m \langle E_n | H_0 Q - Q H_0 | E_m \rangle \langle E_m | H_0 Q - Q H_0 | E_n \rangle = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_m (E_n - E_m)^2 | \langle E_m | Q | E_n \rangle |^2, \end{aligned}$$

bei den Umformungen wurden die in der Quantenmechanik üblichen Methoden benutzt ($\dot{Q} \Psi_n = \sum_m \langle E_m | \dot{Q} | E_n \rangle \Psi_m$, $\langle E_m | 1 | E_n \rangle = \int \Psi_m^* \Psi_n dx = \delta_{nm}$; siehe auch die Fußnote auf dieser Seite).

Führen wir nun die Frequenz ω ein, die durch

$$(A, 2) \quad \hbar \omega = |E_n - E_m|$$

¹⁾ Da H_0 hermitisch ist, gilt für beliebige Ψ^* und φ : $\int \Psi^* H_0 \varphi dx = \int \varphi H_0 \Psi_n dx$. Folglich ist $\int \Psi_n^* H_0 Q \Psi_n dx = \int (Q \Psi_n) H_0^* \Psi_n dx = E_n \int Q \Psi_n \Psi_n^* = E_n \int \Psi_n^* Q \Psi_n dx$. Denselben Wert hat offenbar der Ausdruck $\int \Psi_n^* Q H_0 \Psi_n dx$, woraus auch die Behauptung folgt, daß die Größe $\langle E_n | \dot{Q} | E_n \rangle$ verschwindet.

definiert ist und berücksichtigen, daß es sich um ein System mit dichten Termen handelt, so können wir in (A, 1) die Summation über m durch eine Integration über ω ersetzen:

$$\begin{aligned}
 (A, 3) \quad \langle E_n | \dot{Q}^2 | E_n \rangle &= \\
 &= \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty (\hbar\omega)^2 |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \varrho(E_n + \hbar\omega) \hbar d\omega + \\
 &+ \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty (\hbar\omega)^2 |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \varrho(E_n - \hbar\omega) \hbar d\omega = \\
 &= \int_0^\infty \hbar\omega^2 \left\{ |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \varrho(E_n + \hbar\omega) + \right. \\
 &\quad \left. + |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \varrho(E_n - \hbar\omega) \right\} d\omega,
 \end{aligned}$$

dabei entspricht das erste Integral den Gliedern der Summe in (A, 1) mit $E_n > E_m$, das zweite den Gliedern mit $E_n < E_m$ [zur Einführung der Term-dichte $\varrho(E)$ siehe auch § 2].

Die in einem realen System zu beobachtenden Schwankungen erhält man durch Mittelung der Schwankungen in den einzelnen Zuständen n mit dem Gewichtungsfaktor $f(E_n)$. Die uns interessierende Größe $\bar{Q}^2 = \bar{I}^2$ beträgt also

$$\begin{aligned}
 (A, 4) \quad \bar{Q}^2 &= \sum_n f(E_n) \langle E_n | \dot{Q}^2 | E_n \rangle = \\
 &= \int_0^\infty \hbar\omega^2 \left[\int_0^\infty \varrho(E) f(E) \left\{ |\langle E + \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E + \hbar\omega) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + |\langle E - \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E - \hbar\omega) \right\} dE \right] d\omega,
 \end{aligned}$$

denn die Anzahl der Energietermine im Intervall dE beträgt $\varrho(E) dE$. Für das betrachtete lineare System ist bei Anlegen einer Spannung $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ der Strom $\bar{Q} = I = \mathcal{E}/Z(\omega)$, wobei Z die Impedanz ist. Man kann also annehmen, daß die Schwankungsströme in einem System mit der Impedanz $Z(\omega)$ auf einer Schwankungsspannung \mathcal{E} beruhen, wobei nach (A, 4) (siehe auch Abschnitt 1) gilt

$$\begin{aligned}
 (A, 5) \quad \bar{\mathcal{E}}^2 &= \int_0^\infty w(\omega) d\omega = \int_0^\infty |Z(\omega)|^2 |I_\omega|^2 d\omega = \\
 &= \int_0^\infty \hbar\omega^2 |Z(\omega)|^2 \left[\int_0^\infty \varrho(E) f(E) \left\{ |\langle E + \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E + \hbar\omega) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + |\langle E - \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E - \hbar\omega) \right\} dE \right] d\omega.
 \end{aligned}$$

Zur Gewinnung der quantentheoretischen NYQUIST-Formel hat man den Ausdruck (A, 5) mit dem Ausdruck (2,14) für $R/|Z|^2$ zu verknüpfen, den wir hier nochmals angeben:

$$\begin{aligned}
 (A, 6) \quad \frac{R}{|Z|^2} &= \pi\omega \int_0^\infty \varrho(E) f(E) \left\{ |\langle E + \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E + \hbar\omega) - \right. \\
 &\quad \left. - |\langle E - \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E - \hbar\omega) \right\} dE.
 \end{aligned}$$

Die Ausdrücke (A, 5) und (A, 6) werden bestimmt durch die in beiden vorkommenden Größen

$$(A, 7) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathcal{E}^2} &= \int_0^\infty |Z(\omega)|^2 \hbar \omega^2 C(+)\, d\omega, \quad \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = \pi \omega C(-), \\ C(\pm) &= \int_0^\infty \varrho(E) f(E) \left\{ |\langle E + \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E + \hbar \omega) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm |\langle E - \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E - \hbar \omega) \right\} dE. \end{aligned} \right.$$

Wir nehmen jetzt in dem zweiten Integral in (A, 7), vor dem das Zeichen \pm steht, die Variablentransformation $E \rightarrow E + \hbar \omega$ vor und berücksichtigen dabei, daß das Matrixelement $\langle E - \hbar \omega | Q | E \rangle = \int \Psi_{E-\hbar\omega} Q \Psi_E dx$ für $E < \hbar \omega$ verschwindet [sämtliche Energierterme werden als positiv angenommen, was in (A, 7) zum Ausdruck kommt, indem die Integration bei der Energie $E = 0$ beginnt]. Wir erhalten dadurch (wir erinnern daran, daß wegen der Hermitizität von Q gilt $|\langle E | Q | E + \hbar \omega \rangle|^2 = |\langle E + \hbar \omega | Q | E \rangle|^2$):

$$(A, 8) \quad \begin{aligned} C(\pm) &= \int_0^\infty |\langle E + \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E + \hbar \omega) \varrho(E) f(E) \times \\ &\quad \times \left[1 \pm \frac{f(E + \hbar \omega)}{f(E)} \right] dE = \\ &= \left\{ 1 \pm e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}} \right\} \int_0^\infty |\langle E + \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \varrho(E + \hbar \omega) \varrho(E) f(E) dE, \end{aligned}$$

wobei beim Übergang zum zweiten Ausdruck berücksichtigt wurde, daß im thermodynamischen Gleichgewicht das Gewichtsverhältnis

$$\frac{f(E + \hbar \omega)}{f(E)} = e^{-\hbar \omega / kT} \text{ ist. Aus (A, 8) und (A, 7) folgt}$$

$$(A, 9) \quad \left\{ \begin{aligned} C(+) &= \frac{1 + e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}}}{1 - e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}}} C(-) = \left(1 + \frac{2}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \right) C(-) = \\ &= \frac{2}{\pi \omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \right) \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2}, \\ \overline{\mathcal{E}^2} &= \int_0^\infty w(\omega) d\omega = \int_0^\infty |Z|^2 \hbar \omega^2 C(+)\, d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \left(\frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \right) d\omega, \end{aligned} \right.$$

so daß für w die quantentheoretische Formel (2,3) von NYQUIST herauskommt:

$$(A, 10) \quad w(\omega) = \frac{2}{\pi} R(\omega) \left(\frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / k T} - 1} \right).$$

Der in (A, 10) auftretende Ausdruck $\frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / k T} - 1}$ ist formal der Ausdruck für die mittlere Energie eines Oszillators mit der Frequenz ω bei der Temperatur T . Um Mißverständnissen vorzubeugen, muß man also vielleicht betonen, daß dieses Ergebnis trotzdem auf keiner besonderen Modellvorstellung über den Charakter des betrachteten linearen dissipativen Systems beruht. Die Formel von NYQUIST wurde in diesem Artikel fast ausschließlich für den elektrischen Fall erörtert. Wie bereits bemerkt, ist jedoch insbesondere auf Grund ihrer im Anhang gegebenen Herleitung augenscheinlich, daß die Formel von NYQUIST tatsächlich für jedes lineare dissipative System gilt, unabhängig davon, ob dieses System elektrischer oder mechanischer Natur ist. Von der Anwendbarkeit der NYQUISTschen Formel auf die Theorie der BROWNSchen Bewegung war schon in Abschnitt 1 die Rede. Dieser Fall, sowie auch das Problem der Anwendung der Formel von NYQUIST zur Feststellung des Zusammenhanges zwischen der Strahlungsdämpfung und den Schwankungen des elektrischen Feldes im Vakuum oder der akustischen Strahlungsdämpfung und den Druckschwankungen in einem Gas sind eingehender bei CALLEN und WELTON behandelt worden.

Übersetzt von H. VOGEL.

Literatur

- CALLEN, H. B., und WELTON, P. A.: Phys. Rev. 83, 34, 1951.
 CASIMIR, H., und RADEMAKERS, A.: Physica 13, 33, 1947.
 GINSBURG, L. W.: Uspechi Fiz. Nauk 38, 490, 1949. — Uspechi Fiz. Nauk 42, 169, 333, 1950. — Žurn. eksper. teor. Fiz. 21, 979, 1951.
 GORELIK, G. S.: Uspechi Fiz. Nauk 44, 33, 1951.
 LANDAU, L.: Sow. Phys. 12, 123, 1937.
 LANDAU, L., u. LIFSHIZ, J.: Quantenmechanik. Band 1, Staatl.-Techn. Verl. 1948. — Statistische Physik, Staatl.-Techn. Verl. 1951.
 LEONTOWITSCH, M. A.: Statistische Physik, Staatl.-Techn. Verl. 1944. — Einführung in die Thermodynamik, Staatl.-Techn. Verl. 1951.
 NYQUIST, H.: Phys. Rev. 32, 110, 1928.
 PLANCK, M.: Theorie der Wärmestrahlung.
 STEELE, M., Phys. Rev. 81, 262, 1951.
 UHLENBECK, G. E., u. ORNSTEIN, L. S.: Phys. Rev. 36, 823, 1930; Rev. Mod. Phys. 17, 323, 1945.
 Sammelband: „Die BROWNSche Bewegung“. Arbeiten von EINSTEIN, A., und SMOLUCHOWSKI, M.: Ergänzende Artikel von KRUTKOW, J. A., und DAWYDOW, B. I., Staatl.-Wiss.-Techn. Verl. 1936.

Über die jüngste Entwicklung der klassischen Elektrodynamik¹⁾

Von L. INFELD

I. Kritik der MAXWELL-LORENTZschen Theorie

Ich möchte meinen Vortrag mit einer Kritik der MAXWELLSchen Theorie einleiten.

Wir wissen, daß diese Theorie in der Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft eine große Rolle spielt. Wir wissen, wie viele Tatsachen diese Theorie erklären kann. Heute aber, schlage ich vor, wollen wir unsere Aufmerksamkeit nicht den zweifellos sehr großen Erfolgen dieser Theorie, sondern ihren Fehlern zuwenden.

Ich werde die vierdimensionale Bezeichnungsweise benutzen. Das elektromagnetische Feld ist durch den Vektor \mathfrak{E} des elektrischen Feldes und durch den Vektor \mathfrak{H} des magnetischen Feldes charakterisiert. Diese sechs Komponenten des elektromagnetischen Feldes charakterisieren wir in der relativistischen Schreibweise durch einen schiefsymmetrischen Tensor $f_{\alpha\beta}$, der ebenfalls sechs Komponenten besitzt. Die griechischen Indizes laufen von 0 bis 3. Ich erwähne weiter, daß die quadratische Form der Raum-Zeit-Metrik so gewählt ist, daß das Heraufziehen des Index 0 ohne Wertänderung der betreffenden Komponente erfolgt, während das Heraufziehen der Indizes 1, 2 und 3 das Vorzeichen der Komponenten ändert. Schließlich bedeutet die Wiederholung eines Index wie üblich eine Summation; die Lichtgeschwindigkeit setzen wir gleich Eins.

Noch eine Vereinbarung: ein Index hinter einem Komma bedeute Differentiation: $f_{\alpha\beta,\gamma} = \partial f_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma$.

In dieser Bezeichnungsweise können wir die vier ersten MAXWELLSchen Gleichungen in sehr einfacher Form niederschreiben, wenn wir Vektorpotentiale einführen. Zwischen dem elektromagnetischen Feld und den Vektorpotentialen besteht der Zusammenhang:

$$(1) \quad f_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}.$$

Folgende vier Gleichungen für die Funktion $f_{\alpha\beta}$ sind diesen Gleichungen äquivalent:

$$(1') \quad f_{[\alpha\beta,\gamma]} = f_{\alpha\beta,\gamma} + f_{\beta\gamma,\alpha} + f_{\gamma\alpha,\beta} = 0.$$

Die zweite Vierergruppe der MAXWELLSchen Gleichungen ist im Fall eines elektromagnetischen Feldes ohne Ströme:

$$(2) \quad f^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0.$$

¹⁾ Erweiterte Fassung eines auf der Tagung über „Grundlagen der Quantentheorie“ am 19. 3. 53 gehaltenen Vortrages.

Gewöhnlich wird diese Vierergruppe der MAXWELLSchen Gleichungen aus einem Variationsprinzip abgeleitet, unter Benutzung einer LAGRANGE- oder HAMILTON-Funktion. Dann wissen wir auch genau, daß die Erhaltungssätze erfüllt sein werden. Im MAXWELLSchen Fall nehmen wir folgendes Variationsprinzip an:

$$(3) \quad \delta \int F d_{(4)} x = 0,$$

wobei

$$(3a) \quad F = -\frac{1}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}.$$

Das bedeutet, daß wir (1), also die ersten vier MAXWELLSchen Grundgleichungen postulieren, danach, gemäß (3), die elektromagnetischen Potentiale variieren und so die übrigen vier MAXWELLSchen Grundgleichungen erhalten.

Auf diese Weise werden im allgemeinen aus den Gleichungen (1) und aus dem Variationsprinzip (3) die MAXWELLSchen Gleichungen im Fall eines reinen elektromagnetischen Feldes hergeleitet.

Versuchen wir jetzt, dieses Verfahren einer Kritik zu unterziehen. Wir wollen hierbei beachten, daß die elektromagnetischen Potentiale im allgemeinen keine physikalische Bedeutung haben, da wir zu den elektromagnetischen Potentialen den Gradienten eines Skalars hinzuaddieren können, ohne die elektromagnetischen Felder, die eine physikalische Bedeutung haben, zu verändern.

Ich möchte jetzt zeigen, daß man auch etwas anders verfahren kann. Insbesondere können wir anstatt (1) voraussetzen und (2) daraus abzuleiten, auch umgekehrt, (2) voraussetzen und (1) ableiten. In diesem Fall werden wir nicht die elektromagnetischen Potentiale, sondern das elektromagnetische Feld variieren, das eine physikalische Bedeutung hat. Kehren wir also zu unserem Variationsprinzip zurück und variieren wir jetzt das Feld. Es ist jedoch nicht gestattet, diese Variationen direkt durchzuführen, da die $f_{\alpha\beta}$ nicht beliebig sind — erfüllen sie doch nach Voraussetzung die Gleichungen (2), die uns sagen, daß keine Ströme vorhanden sind. Unser Variationsprinzip wird dann:

$$(4) \quad \delta \int (F - A_\alpha f^{\alpha\beta}{}_{,\beta}) d_{(4)} x = 0,$$

die A_α sind LAGRANGESche Multiplikatoren. Nun erhalten wir, wenn wir die $f_{\alpha\beta}$ variieren:

$$(5) \quad f_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta},$$

d. h. die ersten vier MAXWELLSchen Grundgleichungen.

Die Schwierigkeit, auf die wir aufmerksam machten, kann man also bis zu einem gewissen Grade beseitigen, indem man keine elektromagnetischen Potentiale einführt, sondern nur feststellt, daß (1) mit (1') äquivalent ist; diese beiden Gleichungen enthalten keine elektromagnetischen Potentiale. Die weiteren Einwände, die man gegen die MAXWELLSche Theorie erheben kann, sind ernsterer Natur und haben eine größere physikalische Bedeutung.

Wir wissen, daß die kugelsymmetrischen und statischen Lösungen der MAXWELLSchen Gleichungen zu einer unendlichen Energie des Feldes führen;

deshalb können wir das Elektron nicht durch eine Singularität des elektromagnetischen Feldes beschreiben.

Die LORENTZsche Theorie, die die Ladungsdichte und deren Geschwindigkeit einführt, ist kein Ausweg aus dieser schwierigen Situation. Tatsächlich werden in der LORENTZschen Theorie die Gleichungen (2) durch die Gleichungen

$$(6) \quad f^{\alpha\beta}_{, \beta} = \varrho_{(0)} v^{\alpha}$$

ersetzt, wobei

$$(7) \quad v^{\alpha} = \frac{dx_{\alpha}}{ds}; \quad v^{\alpha} v_{\alpha} = 1$$

ist und $\varrho_{(0)}$ die Verteilung der Ladungsdichte beschreibt. Bekanntlich pflegen wir diese LORENTZschen Gleichungen in folgender Weise zu interpretieren: die Ladungsdichte und ihre Geschwindigkeit sind Feldfunktionen; wenn wir sie kennen, können wir die Felder berechnen. Diese Auslegung ist typisch dualistisch. Die Ströme sind gegeben, die Elektronen bewegen sich mit bestimmten Geschwindigkeiten. Wie aber ist die Elektronenladung dichtemäßig verteilt? Wie ist ihre Struktur? Wie kommt es zustande, daß das Elektron, dessen negative Ladungen sich doch abstoßen, nicht explodiert? Wir müssen das Vorhandensein irgendwelcher mechanischen Kohäsionskräfte voraussetzen, die eine Explosion verhindern. Die eben genannte Schwierigkeit ist gut bekannt und wurde oftmals diskutiert. Aus der Relativitätstheorie wissen wir, daß die Energie des Elektrons gleich $m_0 c^2$ ist (m_0 : Masse des Elektrons; c : Lichtgeschwindigkeit). Andererseits, wenn wir uns das Elektron als geladene Kugel mit einem Radius r_0 und der Ladung e vorstellen, so wird seine Energie gleich $\frac{e^2}{r_0}$, mit einem summarischen Faktor multipliziert, der von der Art der Ladungsverteilung abhängt. Wir können vereinbaren,

$$(8) \quad m_0 c^2 = \frac{e^2}{r_0}$$

zu schreiben, wobei wir in einer derartigen Gleichung r_0 als Definition des Elektronenradius ansehen. Wir wissen, daß das Elektron eine endliche Energie besitzt, daß uns aber seine Struktur weder durch die MAXWELLSche Theorie, in der das Elektron durch eine Singularität dargestellt wird, noch durch die LORENTZsche Theorie, bei der die Verteilung der Ladungen unbekannt ist, gegeben wird.

Immer mehr festigt sich die Überzeugung, daß schon in der klassischen Elektrodynamik irgendein Parameter auftreten müßte, der mit der Struktur des Elektrons zusammenhängt, und zwar entweder das Verhältnis $\frac{e}{m_0}$ oder r_0 . Tatsächlich führen alle Versuche, über die MAXWELLSche und LORENTZsche Theorie hinauszugehen, zur Einführung eines neuen Parameters: entweder des Elektronenradius oder des Verhältnisses $\frac{e}{m_0}$. Leider gibt es viele solcher Versuche. Das ist ein schlechtes Zeichen: es weist darauf hin, daß kein

Veg eindeutig und klar vorgezeichnet ist, wie man die Schwierigkeiten der MAXWELLSchen und der LORENTZschen Theorie beseitigen könnte.

Schließlich möchte ich noch einen weiteren Einwand formulieren, den man sowohl gegen die MAXWELLSche als auch die LORENTZsche Theorie erheben kann. Dieser Einwand erscheint mir sehr wesentlich, obwohl ihm bisher weniger Aufmerksamkeit geschenkt wurde als den vorhin erwähnten.

Betrachten wir die Lösung der MAXWELLSchen Theorie, die zwei ruhenden Ladungen, d. h. zwei ruhenden Singularitäten entspricht. Wie uns gut bekannt ist, existiert eine derartige elektrostatische Lösung. Wir wissen jedoch, daß in der Natur zwei Ladungen nicht im Ruhezustand verharren können.

In der LORENTZschen Theorie wird diese Schwierigkeit durch eine zusätzliche Bewegungsgleichung der Form

$$9) \quad e f_{\alpha\beta} v^\alpha = m_0 \frac{dv_\beta}{ds}; \quad ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

beseitigt.

Jedoch ist auch diese Lösung nicht zufriedenstellend. In der LORENTZschen Theorie kommt die Masse des Elektrons nicht in den Feldgleichungen, sondern in den Bewegungsgleichungen vor. Außerdem tritt in diesen Bewegungsgleichungen das auf das Elektron einwirkende Feld als äußeres Feld auf. Damit wird das Feld künstlich unterteilt in ein äußeres Feld und das Feld des Elektrons selbst. Ich lasse hier die Tatsache außer acht, daß Feld- und Bewegungsgleichungen ein System von Gleichungen darstellen, das außerordentlich schwer zu lösen ist. Immer mehr setzt sich unter den Physikern die Überzeugung durch, daß die Bewegungsgleichungen sich aus den Feldgleichungen ergeben sollten, wie das bei Elementarteilchen im Gravitationsfeld, das durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben wird, der Fall ist.

Derart also lassen sich die Einwände gegen die Theorien von MAXWELL und LORENTZ umreißen. Ich möchte aber nochmals betonen, daß diese Kritik in keiner Weise die hervorragende Bedeutung der genannten Theorien in der Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft schmälert.

II. Ein Versuch, über die Theorien von MAXWELL und LORENTZ hinauszugehen

Von den vielen Versuchen, über die Theorien von MAXWELL und LORENTZ hinauszugehen, möchte ich hier kurz den Ansatz erwähnen, den ich mit BORN zusammen ausgearbeitet habe und danach etwas ausführlicher auf den letzten Versuch von DIRAC eingehen.

BORN und ich versuchten, eine nichtlineare Elektrodynamik zu formulieren. Ich werde mich bemühen, diesen Versuch möglichst einfach darzustellen. Setzen wir voraus, daß unsere LAGRANGE-Funktion nicht wie in der MAXWELLSchen Theorie durch $F = -\frac{1}{2} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}$, sondern durch eine Funktion von F , d. h. durch

$$10) \quad L = L(F)$$

gegeben ist.

In diesem Fall muß F eine reine Zahl sein. Andererseits wissen wir, daß F die Dimension $\left[\frac{\text{Energie}}{\text{cm}^3} \right]$ hat. Dividieren wir also F durch die Konstante b^2

$$(11) \quad b = \frac{e}{r_0^2},$$

dann wird F in solchen natürlichen Einheiten eine dimensionslose Zahl. Das einfachste Beispiel, das BORN angab, war:

$$(12) \quad L = \sqrt{1 + 2F} - 1.$$

Man sieht, daß wir hier für kleine F (in natürlichen Einheiten) die MAXWELLSche LAGRANGE-Funktion erhalten. Die Feldgleichungen, die wir unter Annahme von (1) und durch Variation der A_α erhalten, sind nichtlineare Gleichungen.

Ich war schon immer und bin weiterhin der Meinung, daß die Entwicklung der Wissenschaft in Richtung auf nichtlineare Theorien verlaufen wird. Jedoch wachsen im nichtlinearen Fall die mathematischen Schwierigkeiten außerordentlich. Der Grund hierfür liegt vor allem darin, daß das Superpositionsprinzip nicht mehr gilt, daß also die Summe zweier Lösungen der nichtlinearen Gleichungen selbst keine Lösung ist.

Welche der vorher genannten Einwände beseitigt die nichtlineare Elektrodynamik? Sie operiert ähnlich der MAXWELLSchen Theorie mit Potentialen, macht aber den zweiten Einwand gegenstandslos. Das besagt, daß sie um in ihrer statischen und kugelsymmetrischen Lösung ein Modell des Elektrons von bestimmter Struktur und endlicher Energie gibt. Das ist zweifellos ein Erfolg der nichtlinearen Elektrodynamik. Die Struktur des Elektrons wird von der Wahl der LAGRANGE-Funktion abhängig sein. Leider ist diese Wahl nicht eindeutig. Es erweist sich, wie PLEBAŃSKI zeigte, daß wir zu einem beliebig vorgegebenen Elementargesetz eine LAGRANGE-Funktion finden können, die uns eben dieses Gesetz liefert. So ist etwa im Fall des COULOMBSchen Gesetzes die MAXWELLSche LAGRANGE-Funktion die richtige Antwort.

Nach diesen kurzen Bemerkungen über die nichtlineare Elektrodynamik gehe ich zur Elektrodynamik von DIRAC über.

In der DIRACschen Elektrodynamik führen wir, wie in der MAXWELLSchen Theorie, die elektrodynamischen Potentiale A_α ein, sowie

$$(13) \quad f_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}.$$

Die DIRACsche LAGRANGE-Funktion ist

$$(14) \quad L = F - \lambda (\mu^2 - k^2),$$

wobei

$$(15) \quad \mu^2 = A_\alpha A^\alpha; \quad k = \frac{m}{c}; \quad (c = 1).$$

Wir variieren wieder die A_α sowie λ und erhalten mit (13) folgende Gleichungen:

$$(16) \quad f^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = -\lambda A^\alpha$$

$$(17) \quad A_\alpha A^\alpha = \mu^2 = k^2$$

Wir haben hier nach Einführung der elektrodynamischen Potentiale fünf Gleichungen für die fünf Größen A_α und λ gewonnen. Der Koeffizient λ kann leicht aus diesen Gleichungen eliminiert werden. Wir erhalten nämlich durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung (16) mit A_α :

$$(8) \quad \lambda = -f^{\alpha\beta}{}_{,\beta} A_\alpha k^{-2}$$

Wenn wir dieses λ wieder in (6) einsetzen, ergeben sich die Gleichungen:

$$(9) \quad f^{\alpha\beta}{}_{,\beta} (\delta_\alpha^\alpha - A_\alpha A^\alpha k^{-2}) = 0.$$

Diese Gleichungen sind „im allgemeinen“ den DIRACschen Gleichungen äquivalent. Wir sagen „im allgemeinen“ in dem Sinne, daß man hier, bei Möglichkeit von (19), zwei Fälle unterscheiden muß:

Fall 1.

$$(10a) \quad \det | \delta_\alpha^\alpha - A_\alpha A^\alpha k^{-2} | \neq 0.$$

Dann ergibt sich aus den Gleichungen (19)

$$(11) \quad f^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0,$$

d. h. die MAXWELLSchen Gleichungen.

Fall 2.

$$(12b) \quad \det | \delta_\alpha^\alpha - A_\alpha A^\alpha k^{-2} | = 0.$$

Das aber bedeutet gerade

$$A_\alpha A^\alpha = k^2$$

und die Gleichung $f^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ braucht nicht erfüllt zu sein. Also unterscheidet sich die Form (19) von der DIRACschen Form dadurch, daß, wenn wir (19) annehmen, die Normierungsbedingung in materiefreien Gebieten nicht erfüllt zu sein braucht.

Kehren wir zur Formel (16) zurück. Wir wollen diese Gleichungen in rein feldtheoretischer Weise interpretieren; die rechte Seite von (16) wollen wir als feldmäßige Darstellung des Stroms auffassen, d. h.

$$(12) \quad -\lambda A^\alpha = \varrho_{(0)} v^\alpha = \varrho_{(0)} \frac{dx^\alpha}{ds}.$$

Wir fragen, ob dann die Bewegungsgleichungen folgen. DIRAC antwortet bejahend auf diese Frage; er stützt sich auf allgemeine Überlegungen, in denen Begriffe der Feldtheorie mit solchen der Theorie der Elementarteilchen vermischt sind.

Ich habe mich bemüht, die dritte Frage — ob tatsächlich die Bewegungsgleichungen sich aus den Feldgleichungen ergeben — genauer zu untersuchen. Ich behandelte hierbei die DIRACschen Gleichungen in der Weise, daß ich zu ihrer Lösung die gleiche Näherungsmethode anwandte, welche EINSTEIN,

HOFFMANN und ich und in der Sowjetunion FOCK mit großem Erfolg in der Relativitätstheorie angewandt hatten; die gleiche Methode benutzte auch J. WERLE bei der Untersuchung der Kernkräfte.

Ich möchte die Ergebnisse dieser Arbeiten allgemein formulieren. Eine kleine Elektronenwolke bewegt sich in einem homogenen elektrischen Feld — in erster Näherung — in Übereinstimmung mit den Bewegungsgleichungen von LORENTZ. In der nächsten Näherung treten die COULOMBSchen Kräfte auf, die Wolke läuft auseinander.

Interessant ist der Fall einer Elektronenwolke in einem homogenen Magnetfeld. Stellen wir uns vor, daß wir eine derartige Elektronenwolke senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes bewegen. Diese Wolke wird sich als Ganzes wiederum in Übereinstimmung mit der LORENTZschen Gleichung, auf einer Kreisbahn bewegen. Außerdem aber werden bestimmte innere Bewegungen eintreten. Diese zeigen sich am deutlichsten, wenn die Bewegungsrichtung der Wolke mit der Richtung des homogenen Magnetfeldes übereinstimmt. Zwar bewegt sich diese Wolke als Ganzes gleichmäßig, jedoch haben wir (im zylindersymmetrischen Fall) eine Drehung dieser Wolke um die Symmetrieachse sowie rhythmische Verdichtungen und Verdünnungen der Wolke in senkrechter Richtung zur Achse.

Die Frequenz der Umdrehungen um die Symmetrieachse ist die LAMOR-Frequenz, die Periode der Verdichtungen und Verdünnungen ist zweimal kleiner als die LAMOR-Frequenz.

Gibt es einen derartigen Effekt? DIRAC ist sich darüber im klaren, daß die Elektronenwolke im magnetischen Feld nicht die LORENTZsche Gleichung erfüllen kann. Jedoch zeigt meine Analyse die Natur dieser Abweichung. Im Zusammenhang mit dieser Schwierigkeit formuliert DIRAC eine neue Version seiner Theorie. Sie erscheint mir jedoch sehr kompliziert und künstlich. Indem wir zusammenfassen, können wir sagen: die nichtlineare Elektrodynamik gibt uns zwar die Struktur des Elektrons, sie gibt uns aber nicht das Bewegungsgesetz. Die DIRACsche Elektrodynamik dagegen gibt uns zwar nicht die Struktur des Elektrons, wohl aber das Bewegungsgesetz. Nach der letzteren Theorie treten aber schon in der ersten Näherung gewisse Unterschiede zwischen der sich aus DIRACs Theorie ergebenden Bewegung und der LORENTZschen Bewegungsgleichung auf. Und zwar zeigen sich diese Unterschiede im Fall einer Wolke in einem Magnetfeld und betreffen die inneren Bewegungen der Wolke. In der Gleichung von DIRAC ergeben sich diese Effekte schon, noch bevor das Auseinanderlaufen der Wolke, d. h. die COULOMBSche Abstoßung, berücksichtigt wird.

III. Elektrodynamik ohne Potentiale

Ich möchte hier eine Skizze einiger Ideen geben, Arbeiten über Elektrodynamik betreffend, welche gemeinsam mit PLEBAŃSKI durchgeführt wurden.

Unsere Betrachtungen zur Elektrodynamik werden rein feldtheoretisch sein und sich nur auf Begriffe stützen, die einen physikalischen Sinn haben. Ihre Schwäche wird in einer zu starken Verallgemeinerung liegen, die später durch weitere Forschungen wieder eingeschränkt werden muß. Diese Untersuchungen

nd schon im Gange, ihre nähere Erläuterung würde jedoch den Rahmen dieses Referates überschreiten. Ich möchte noch einmal wiederholen, daß das folgende nur ein kurzer Abriß unserer Arbeiten über die klassische Elektrodynamik ist.

Wir führen keine Potentiale ein, da sie keine physikalische Bedeutung haben. Der grundlegende Begriff wird bei uns der des elektromagnetischen Feldes sein, das durch einen schiefssymmetrischen Tensor charakterisiert wird, den wir hier an Stelle der früheren Bezeichnung $f_{\alpha\beta}$, $p_{\alpha\beta}$ nennen werden. Ein weiterer Begriff, den wir einführen, ist der Vierervektor des Stromes in feldtheoretischer Auffassung. Als Stromvektor nehmen wir den einfachsten Vektor an, den wir aus dem schiefssymmetrischen Tensor des Feldes bilden können, d. h. wir setzen

$$(23) \quad p^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = j^\alpha.$$

Es ist wichtig, daß man versteht: dieser Strom ist nicht, wie in der MAXWELLSchen Theorie, etwas Gegebenes, sondern etwas auf der Basis des Feldbegriffs Definiertes. Das heißt: die Gleichungen (23) sind keine Feldgleichungen, sondern Definitionsgleichungen für den Strom. Da wir das Feld und den Strom haben, können wir zwei grundlegende Skalare bilden, die Größe P und die elektrische Dichte $\varrho_{(e)}$:

$$(24) \quad P = -\frac{1}{4} p_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}; \quad \varrho_{(e)} = (j^\alpha j_\alpha)^{1/2}.$$

Das sind zwar nicht die einzigen Skalare, die wir aus den Feldfunktionen bilden können, wir beschränken aber unsere Theorie auf die beiden genannten Skalare; eine Erweiterung führt zu keinerlei Schwierigkeiten. Beide Skalare, P und $\varrho_{(e)}$, sind Funktionen der Feldgrößen und ihrer Ableitungen. Wir wollen beachten, daß diese Skalare nicht die gleiche Dimension haben. Der Skalar P hat die Dimension einer Energie pro cm^3 , $\varrho_{(e)}$ dagegen hat eine andere Dimension, nämlich die einer Ladung pro cm^3 . Multiplizieren wir es jedoch mit dem DIRACschen $k = \frac{mc^2}{e}$, dann hat

$$(25) \quad \varrho = k \varrho_{(e)}$$

ebenfalls die Dimension einer Energie pro cm^3 . Jetzt können wir diese beiden Skalare von nunmehr gleicher Dimension — wenn wir wollen — durch $b^2 \left(b = \frac{e}{r_0^2} \right)$ dividieren und erhalten sowohl P als auch ϱ in natürlichen Einheiten.

Die Differentialgleichungen des Feldes leiten wir, wie vorher, aus einem Variationsprinzip ab. Wir setzen dabei voraus, daß die LAGRANGE-Funktion eine Funktion von P und ϱ ist und daß allein die Komponenten $p_{\alpha\beta}$ des elektromagnetischen Feldes variiert werden. Nachdem wir

$$(26) \quad L_P = \frac{\partial L}{\partial P}; \quad L_\varrho = \frac{\partial L}{\partial \varrho}$$

schreiben, erhalten wir

$$(27) \quad \delta \int L d_{(4)} x \left\{ -\frac{1}{2} L_P p_{\alpha\beta} - \left(L_e \frac{k^2}{\varrho} j_\alpha \right)_{,\beta} \right\} \delta p^{\alpha\beta} + \int \dots$$

Obf.

und daraus die Feldgleichungen

$$(28) \quad L_P p_{\alpha\beta} = \left(L_e \frac{k^2}{\varrho} j_\beta \right)_{,\alpha} - \left(L_e \frac{k^2}{\varrho} j_\alpha \right)_{,\beta}.$$

Wir haben also ein allgemeines Schema der Theorie, welches uns sechs Feldgleichungen für die sechs Komponenten $p_{\alpha\beta}$ gibt. Das sind unsere grundlegenden Feldgleichungen. Es ist charakteristisch, daß wir diese Gleichungen in anderer, wenn auch gleichwertiger Form schreiben können. Wir wollen nämlich einen neuen Vektor A_α einführen, der in folgender Weise definiert ist:

$$(29) \quad A_\alpha = L_e \frac{k^2}{\varrho} j_\alpha.$$

Ferner sei:

$$(30) \quad L_P p_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}$$

und schließlich

$$(31) \quad \lambda = \frac{\varrho}{k^2 L_e}.$$

Dann ist folgendes System dem System (28) vollkommen gleichwertig:

$$(32) \quad \begin{aligned} f_{\alpha\beta} &= A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta} \\ p^{\beta\sigma}_{,\sigma} &= -\lambda A^\beta \\ \lambda &= \frac{\varrho}{k^2 L_e}. \end{aligned}$$

Das sind Gleichungen zweiter Ordnung für A^β . Sie erinnern in ihrer Struktur an die DIRACschen Gleichungen. Um dies klar zu sehen, wollen wir eine besondere Form der LAGRANGE-Funktion, nämlich

$$(33) \quad L = P + \varrho$$

wählen.

Dann haben wir

$$(34) \quad L_P = 1; \quad L_e = 1; \quad p_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta},$$

und die Gleichungen (31), (32) reduzieren sich damit auf

$$(35) \quad f_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$$

$$(36) \quad \begin{cases} f^{\beta\sigma}_{,\sigma} = -\lambda A^\beta \\ \lambda = \varrho k^{-2} \end{cases}$$

us (36) folgt

$$\begin{aligned} 37) \quad \varrho_{(e)}^2 &= \lambda^2 A^\sigma A_\sigma = \varrho^2 k^{-2} = \varrho^2 k^{-4} A^\sigma A_\sigma \\ \text{der} \quad A^\sigma A_\sigma &= k^2 \end{aligned} \quad (38)$$

In dieser Weise ergibt sich die Theorie von DIRAC als Spezialfall aus unserer allgemeinen Theorie.

Im nächsten Spezialfall wollen wir

$$39) \quad L = F + S \varrho^2$$

Betrachten, wo S eine Konstante ist. Dann ist

$$40) \quad L_\varrho = 2 S \varrho$$

und die Gleichungen (32) reduzieren sich auf:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} &= A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta} \\ 41) \quad f^{\beta\sigma}{}_{,\sigma} &= \frac{1}{2 S k^2} A^\beta. \end{aligned}$$

Das sind die PROCASchen Gleichungen.

Wenn wir schließlich voraussetzen, daß L nicht von ϱ abhängt, so gilt

$$42) \quad L = L(P),$$

und diese Voraussetzung führt zu der nichtlinearen Elektrodynamik, die wir im zweiten Teil unseres Vortrages erwähnten. Die MAXWELLSchen Gleichungen wiederum sind ein Spezialfall hiervon, wenn $L = P$ ist, und wir können sie, wie wir im ersten Teil gesehen haben, durch Variation nach $f_{\alpha\beta}$ erhalten.

Vergleichen wir jetzt diese beiden Formen der Gleichungen, nämlich (28) und (32). Wir sehen, daß die Gleichungen (28) auf dem Begriff des Feldes $p_{\alpha\beta}$ und des Stromes beruhen, der durch die Ableitungen des Feldes definiert ist. Wir wollen kurz sagen, daß die Gleichungen (28) in der „Feldsprache“ ausgedrückt sind und daß P und ϱ die Grundgrößen in der LAGRANGE-Funktion sind.

Andererseits verhält es sich mit den Gleichungen (32). Betrachten wir die Gleichung

$$43) \quad p^{\beta\sigma}{}_{,\sigma} = -\lambda A^\beta.$$

Erheben wir beide Seiten zum Quadrat und summieren über β .

Wir haben dann:

$$44) \quad \frac{\varrho^2}{k^2} = \varrho_{(e)}^2 = \lambda^2 A^\alpha A_\alpha = \frac{\varrho^2 A^\alpha A_\alpha}{k^4 L_\varrho^2}$$

oder

$$45) \quad A_\alpha A^\alpha = \mu^2 = k^2 L_\varrho^2.$$

In den Gleichungen (32) sind A_α und ihre Ableitungen die Grundgrößen. Tatsächlich ist $f_{\alpha\beta}$ eine Funktion von A_α ; wir wissen, daß

$$46) \quad L_P p_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}, \quad L_P P = F,$$

daß also die $p_{\alpha\beta}$ ebenfalls Funktionen von A_α sind. Ebenso sind die Gleichungen (32) Gleichungen in A_α . A_α aber ist mit den Ladungen und ihren Geschwindigkeiten verknüpft! Allgemein gesagt, hebt die Form (28) die Gleichungen den feldmäßigen Aspekt, die Form (32) den Elementarteilchen Aspekt hervor. Im Feldaspekt spielen P und Q (in Abhängigkeit von $p_{\alpha\beta}$) die grundlegende Rolle. Im Elementarteilchenaspekt spielen μ und F (in Abhängigkeit von A_α) die grundlegende Rolle. Aus (45) und (46) ergibt sich, daß man (im allgemeinen) μ und F als Funktionen von P und Q ausdrücken kann. Schon hier, auf klassischem Niveau, tritt also anscheinend ein gewisser Dualismus Feld-Elementarteilchen auf.

Literatur

BORN, M.: Proc. Roy. Soc. A **143**, 1410, 1934.

BORN, M., und INFELD, L.: Proc. Roy. Soc. A **144**, 425, 1934.

DİRAC, P. A. M.: Nature **168**, 906, 1951; Proc. Roy. Soc. A **209**, 291, 1951; **212**, 330, 1953.

EINSTEIN, A., und INFELD, L.: Can. J. of Math. **1** 269, 1949.

FOCK, W.: J. Phys. USSR **1**, 81, 1939.

INFELD, L.: Nature **169** 702, 1952.

INFELD, L.: Abhandlungen, P. A. N. (im Druck).

INFELD, L., und PLEBAŃSKI, J.: Elektrodynamik ohne Potentiale (im Druck).

PLEBAŃSKI, J.: Abhandlungen P. A. N. (im Druck).

WERLE, J.: Phys. Rev. **87**, 159, 1952.

Herausgeber: Prof. Dr. Robert Rompe, Prof. Dr. Friedr. Möglich und Prof. Dr. Rudolf Ritschl; Manuskripte sind zu richten an den Schriftleiter Dr. Wolfram Urich, Institut f. theoretische Physik der Humboldt-Universität, Berlin NW 7, Unter den Linden 6—8. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schleierbauerdamm 19, Fernsprecher: 42 55 71, Postscheckkonto 35021. — Die Zeitschrift „Fortschritte der Physik“ erscheint monatlich; Bezugspreis 5,— DM. je Heft. — Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1027/1/2. — Satz und Druck: Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg, Bez. Leipzig, Carl-von-Ossietzky-Straße 30—31. — Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1226 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik. Printed in Germany.

Physikertagung: „Grundlagen der Quantentheorie“

Vom 18. bis 21. März 1953 fand in Berlin eine von der Physikalischen Gesellschaft in der Deutschen Demokratischen Republik veranstaltete Physikertagung über „Grundlagen der Quantentheorie“ statt, an der zahlreiche in- und ausländische Gäste teilnahmen. Die Tagung wurde durch Prof. Dr. MÖGLICH, Berlin, und Prof. Dr. SEELIGER, Greifswald, eröffnet. Kurzreferate der wichtigsten gehaltenen Vorträge finden sich im folgenden.

F. MÖGLICH (Berlin): Einige Schwierigkeiten der heutigen Form der Quantenmechanik.

Wenn einige Schwierigkeiten der heutigen Form der Quantenmechanik auch von einer Reihe von Physikern, wie etwa HEISENBERG oder BOHR nicht mehr als existent angesehen werden, so gibt es doch noch manch andere — wie z. B. M. v. LAUE oder A. EINSTEIN —, die schon aus rein gefühlsmäßigen Gründen sich mit der Theorie in ihrer heutigen Form nicht restlos abfinden können. Dies bezieht sich vor allem darauf, daß die heutige Theorie Elemente nichtkausaler Beschreibung enthält. Man erkennt dies, wenn man etwa die Lichtaussendung von Atomen, oder überhaupt jede Art von Umwandlungs- oder Zerfallsprozessen betrachtet. Derartige Prozesse werden mittels der sogenannten „Übergangswahrscheinlichkeiten“ beschrieben, die grundsätzlich Wahrscheinlichkeitsaussagen sind, also eine Determinierung des jeweiligen Zeitpunktes des Übergangs nicht zulassen. Solange diese Übergangswahrscheinlichkeiten groß sind, d. h. die Zeiten zwischen zwei Umwandlungen klein, mag man noch geneigt sein, derartige Wahrscheinlichkeitsaussagen hinzunehmen; äußerst beunruhigend wird aber die Situation, wenn Übergänge sehr unwahrscheinlich oder, was dasselbe besagt, wenn das Auftreten eines derartigen Prozesses als sehr selten innerhalb langer Zeiträume vorhergesagt wird, ohne daß ursächliche Gründe für den jeweiligen Vorgang angebar sind. Von hier bis zu einer physikalischen Interpretation der biblischen Schöpfungsgeschichte und ihrer Wunder ist dann kein weiter Schritt mehr. Es können daher die gegenwärtigen Formulierungen der Übergangswahrscheinlichkeiten kaum endgültiger Natur sein. Im Grunde genommen ist auch das vorliegende experimentelle Material sehr spärlich, so daß neue Untersuchungen von Umwandlungs- und Zerfallsprozessen dringend erforderlich sind.

Auch Versuche, wie der von W. WEIZEL (Bonn), mit den auftretenden Akausalitäten dadurch fertig zu werden, daß sie auf dem Wege über einen geeigneten Mechanismus in ein neues Substrat (die „Zeronen“) gebracht werden, bedeuteten nur eine Verlagerung, keine Lösung des Problems.

M. STRAUSS (Berlin): Einige allgemeine Bemerkungen zur „Methodik“ der theoretischen Physik in Anwendung auf die Quantentheorie.

Bekanntlich ist es trotz verschiedener Bemühungen nicht gelungen, im Rahmen der traditionellen Logik einen physikalisch-axiomatischen Aufbau der Quantentheorie (QT) zu geben, durch den der Formalismus dieser Theorie in ähnlicher Weise durch physikalische Prinzipien begründet würde, wie dies für die Theorien der klassischen Physik möglich war. Umgekehrt beruht die seinerzeit vom Vortragenden gegebene axiomatische

Begründung der statistischen Transformationstheorie, außer auf den Axiomen der elementaren Wahrscheinlichkeitslehre, wesentlich auf der expliziten Benutzung einer Prädikatenlogik mit nicht-BOOLEscher Algebra, welche als Formalisierung des allgemeinen Komplementaritätsbegriffes [BOHR und ROSENFELD, PAULI, STRAUSS] anzusehen ist. Nach heutiger Auffassung [FOCK, ALEXANDROW, STRAUSS] kommt jedoch der Komplementarität in der QT eine fundamentale Rolle nur bei korrespondenzmäßiger Verwendung von „Meßaussagen“ über klassische Zustandsgrößen, nicht aber bei konsequenter Verwendung des quantentheoretischen Zustandsbegriffes, zu. — Angesichts dieser Umstände erscheint eine Diskussion der QT auf breiterer Grundlage wünschenswert.

Als eine solche Grundlage können die allgemeinen Lehren dienen, die sich aus der bisherigen Entwicklung der Physik ergeben haben. Zu diesen Lehren gehören die vier Grundzüge des dialektischen Materialismus und die (noch wenig erforschten) Entwicklungsgesetze der physikalischen Wissenschaft, die in subjektivistischer Deutung als „Methodik“ erscheinen.

Als Grundgesetz der Entwicklung der Wissenschaft wird das „Gesetz von der unbedingten Übereinstimmung von Theorie und experimenteller Praxis“ angesehen. Als zwei der wichtigsten Entwicklungsgesetze, die sich auf dieser Grundlage herausgebildet haben, werden genannt die „Tendenz zur Zurückführung von vermeintlichen Dingeigenschaften auf Reaktionsweisen (Prozesse)“ sowie die „Tendenz zur Vereinheitlichung der theoretischen Grundlagen“.

Da die Wahrscheinlichkeiten der QT sich nicht auf Verteilungen im Sinne der klassischen Statistik, sondern auf Übergänge von einem Zustand in einen anderen beziehen, sind die den klassischen Zustandsgrößen entsprechenden „Observablen“ der QT nicht als Dingeigenschaften, sondern als Reaktionsweisen gegenüber Änderungen der Umwelt aufzufassen. [Dies ist der Sachverhalt, der in positivistischer Formulierung als „Nichtobjektivierbarkeit der Meßergebnisse“ erscheint.] Da ferner bei einer Erweiterung des betrachteten Systems durch Einbeziehung der Umwelt („Verschiebung des Schnitts“) sich die Zustandsfunktion des erweiterten Systems in eindeutiger Weise ändert, sind die Wahrscheinlichkeiten der QT nicht als Ausdruck einer metaphysischen Indeterminiertheit („Gott würfelt“) aufzufassen, sondern als ein Ausdruck der Inadäquatheit begrifflicher Isolierung von Teilprozessen.

Angesichts dieser Übereinstimmung der QT mit den allgemeinen Entwicklungstendenzen der physikalischen Wissenschaft und den Grundzügen des dialektischen Materialismus erscheinen die Versuche, der QT ein mehr oder minder klassisch-mechanistisches Modell zu unterlegen [BOHM, WEIZEL, JÁNOSSY], weder philosophisch begründet noch physikalisch aussichtsreich.

Andererseits weist die prinzipielle Unfähigkeit der gegenwärtigen QT, den Wert der Feinstrukturkonstante und der Massenverhältnisse zu begründen, auf einen fundamentalen Mangel dieser Theorie in ihren mathematisch-begrifflichen Grundlagen hin. Da die bisher bekannten Experimente der QT nicht widersprechen, ergibt sich aus ihnen kein klarer Hinweis auf die zu vollziehende Abänderung bzw. „Aufhebung“ der QT. Somit ähnelt die Situation weit mehr derjenigen vor Aufstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie als der, die zur Speziellen Relativitätstheorie oder zur QT führte. Dementsprechend dürfte eine im Sinne des jungen EINSTEIN geführte dialektisch-materialistische Kritik an den in der gegenwärtigen QT noch verbliebenen klassischen Begriffselementen besser zur Vorbereitung einer solchen umfassenderen Theorie geeignet sein als mechanistische Deutungsversuche einerseits und prinzipienloses Experimentieren mit neuen mathematischen Formalismen andererseits. Es ist zu hoffen, daß eine künftige Tagung sich in konkreter Weise mit diesen Fragen beschäftigen wird.

E. BAGGE (Hamburg): Gibt es angeregte Zustände bei Elementarteilchen?

Es wurde gezeigt, daß man die Wechselwirkung von Elementarteilchen mit sich selbst widerspruchsfrei und ohne den statistischen Charakter der Wellenfunktion anzutasten, beschreiben kann, wenn man schon der einzelnen Partikel eine Wellenfunktion zuordnet, die von zwei Koordinaten r_1 und r_2 abhängt. Diese ist so zu interpretieren, daß $|\psi(r_1, r_2)|^2 dx_1 dx_2$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dasselbe Teilchen im Volumenelement dx_1 als Ausgangspunkt (Subjekt) einer Wechselwirkung und im Volumenelement dx_2 als Empfänger (Objekt) derselben Wechselwirkung mit sich zu betrachten. Die konsequente Durchführung des damit vorgezeichneten Programms einer Quantenmechanik von Elementarteilchen führt im Falle des Elektrons auf ein Eigenwertproblem, das als Eigenlösungen Zustände verschiedenen Gesamtspins desselben Teilchens zuläßt. Durch Einführung von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten beim vorliegenden Problem lassen sich die inneren Vorgänge im Elementarteilchen von seinem Verhalten in äußeren Feldern bis zu einem gewissen Grade getrennt behandeln. Es wird nun mitgeteilt, welche Form und Eigenschaften die Eigenlösungen für eine skalare Wellentheorie im Falle des Spins Null bzw. Eins besitzen.

G. HEBER (Jena): Zur BOHMSchen Deutung der Quantenmechanik.

Nach einer kurzen Charakterisierung des BOHMSchen Versuches der Neuinterpretation der Quantenmechanik wird ein spezieller Punkt dieses Versuches genauer diskutiert: die Beziehung $p = \text{grad } S$ zwischen Impuls p und Phase S der komplexen SCHRÖDINGER-Funktion $\psi = R \exp\{i/h S\}$. Es wird darauf hingewiesen, daß in dieser Beziehung eine neue Vorschrift enthalten ist, die in einem gegebenen, durch ψ charakterisierten Zustand enthaltenen Impuls-Meßwerte zu bestimmen. Am Beispiel des Potentialkastens wird gezeigt, daß in allen stationären Zuständen nach BOHM stets $p = 0$ zu erwarten ist, während nach der alten Quantentheorie mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Eigenwerte $+p$ oder $-p$ ($p \neq 0$ i. a.) auftreten sollten. Da beide Theorien auch die makroskopischen Erfahrungen richtig beschreiben müssen, wäre mit Obigem ein experimentelles Argument zugunsten der alten, gegen die BOHMSche Interpretation der Quantentheorie, geliefert. — Allerdings wird darauf hingewiesen, daß unter Umständen der Übergang zur Makrophysik nicht sinnvoll über einen stationären Zustand, sondern über eine Gruppe benachbarter stationärer Zustände vorgenommen werden sollte, wodurch obiges Argument evtl. hinfällig werden könnte.

E. BAGGE und R. RÖHLER (vorgetragen von E. BAGGE): Die Neutronenverteilung in der Nähe einer Wasseroberfläche.

Das Schicksal der schnellen Ultrastrahlungsneutronen ist verschieden je nachdem, ob sie in Luft oder in Wasser abgebremst und absorbiert werden. Die Bremsung in Luft durch Kernstöße geht sehr langsam vor sich, bis die Neutronen schließlich durch den Prozeß $N^{14}(n, p)C^{14}$ absorbiert werden. Dieser Prozeß sorgt dafür, daß in Luft praktisch keine Neutronen unterhalb von 0,26 eV auftreten. In Wasser dagegen erfolgt die Bremsung durch H-Stöße sehr schnell, hier treten bevorzugt thermische Neutronen auf, die erst nach einem längeren Diffusionsprozeß eingefangen werden. Betrachtet man nun die Grenzfläche zwischen Luft und Wasser, so ist es klar, daß in der Nähe der Grenzfläche in Luft ein gewisser Anteil thermischer Neutronen, in Wasser dagegen analog ein gewisser Anteil schneller Neutronen auftreten werden; auch Rückdiffusionsprozesse spielen eine Rolle. Die genauen Verhältnisse in der Nähe der Grenzfläche lassen sich mit Hilfe der FERMI-schen Age-equation berechnen. Eine solche Berechnung ist durchgeführt worden und mit einfachen Experimenten, mit denen die Neutronenintensität in der Nähe einer Wasseroberfläche gemessen werden konnte, verglichen worden. Theorie und Experiment stehen in befriedigender Übereinstimmung.

K. SCHRÖDER (Berlin): Die DIRACsche δ -Funktion in der SCHWARTZschen Theorie der Distributionen.

In der Theorie der Distributionen von L. SCHWARTZ ist die Möglichkeit gegeben, dem mit der uneigentlichen δ -Funktion arbeitenden symbolischen Kalkül, der sich besonders in der Quantentheorie als nützlich erwiesen hat, ein mathematisch exaktes Pendant an die Seite zu stellen.

Ist $\mu(A)$ eine für die BORELSchen Mengen A des \mathbb{R}^n definierte vollständig additive Mengenfunktion, so wird jeder im \mathbb{R}^n stetigen Funktion $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, die außerhalb einer kompakten Menge Null ist [Klasse (\mathfrak{C})], das Funktional

$$\mu[\varphi] = \int \dots \int \varphi d\mu$$

zugeordnet. Es ist stetig in dem Sinne, daß für eine Funktionenfolge $\varphi_\nu \in (\mathfrak{C})$ (die φ_ν sollen alle außerhalb einer festen kompakten Menge verschwinden), die gleichmäßig gegen eine Funktion $\varphi \in (\mathfrak{C})$ konvergiert, $\mu[\varphi_\nu] \xrightarrow{(\nu)} \mu[\varphi]$ gilt. Umgekehrt gehört zu jedem derartigen Funktional eine entsprechende Maßfunktion.

Besitzt das Maß $\mu(A)$ eine Dichte $f(x_1, \dots, x_n)$, so daß

$$\mu(A) = \int \dots \int f dx_1 \dots dx_n,$$

so wird speziell

$$\mu[\varphi] = \int \dots \int \varphi f dx_1 \dots dx_n;$$

umgekehrt gibt es zu jeder in jeder kompakten Menge des \mathbb{R}^n definierten Dichte f ein Maßfunktional

$$\mu[\varphi] = \int \dots \int \varphi f dx_1 \dots dx_n;$$

man schreibt in diesem Fall

$$\mu[\varphi] = f[\varphi].$$

Als DIRACsches Maßfunktional wird definiert

$$\delta[\varphi] = \varphi(a),$$

zu ihm gehört keine Dichte. Die definierende Relation entspricht der symbolischen Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x-a) dx = \varphi(a).$$

Definition einer Distribution: Trägermenge einer Funktion φ sei die abgeschlossene Hülle der Punktmenge des \mathbb{R}^n , für die $\varphi \neq 0$ ist. Zur Klasse (\mathfrak{D}) sollen die Funktionen φ gehören, die unbeschränkt differenzierbar sind, und für die die Trägermenge kompakt ist. In (\mathfrak{D}) ist dann eine Distribution als lineares Funktional $T[\varphi]$ definiert mit der Stetigkeitseigenschaft, daß für eine Folge von Funktionen $\varphi_\nu \in (\mathfrak{D})$, für die die Träger alle in einer festen kompakten Menge enthalten sind und die gleichmäßig gegen Null konvergieren ebenso wie ihre Ableitungen, die Zahlen $T(\varphi_\nu)$ gegen Null konvergieren. Jedes Maßfunktional ist eine Distribution aber nicht umgekehrt. Beispiel für eine Distribution:

$$T[\varphi] = \varphi'(0).$$

Heuristische Betrachtungen legen es nahe, als Ableitung einer Distribution

$$\frac{\partial T(\varphi)}{\partial x_k} = -T\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right]$$

oder allgemeiner

$$D^m T[\varphi] = (-1)^m T[D^m \varphi]$$

zu definieren. Jede Distribution ist also unbeschränkt oft differenzierbar. Der Stufenfunktion

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

(für $x = 0$ nicht definiert) entspricht die Distribution

$$y[\varphi] = \int_0^{\infty} \varphi dx,$$

für ihre ersten Ableitungen gilt

$$y'[\varphi] = \varphi(0) = \delta[\varphi],$$

$$y''[\varphi] = \delta'[\varphi] = -\varphi'(0).$$

Damit hat man ein Analogon zu der symbolischen Relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta'(x) dx = -\varphi'(0).$$

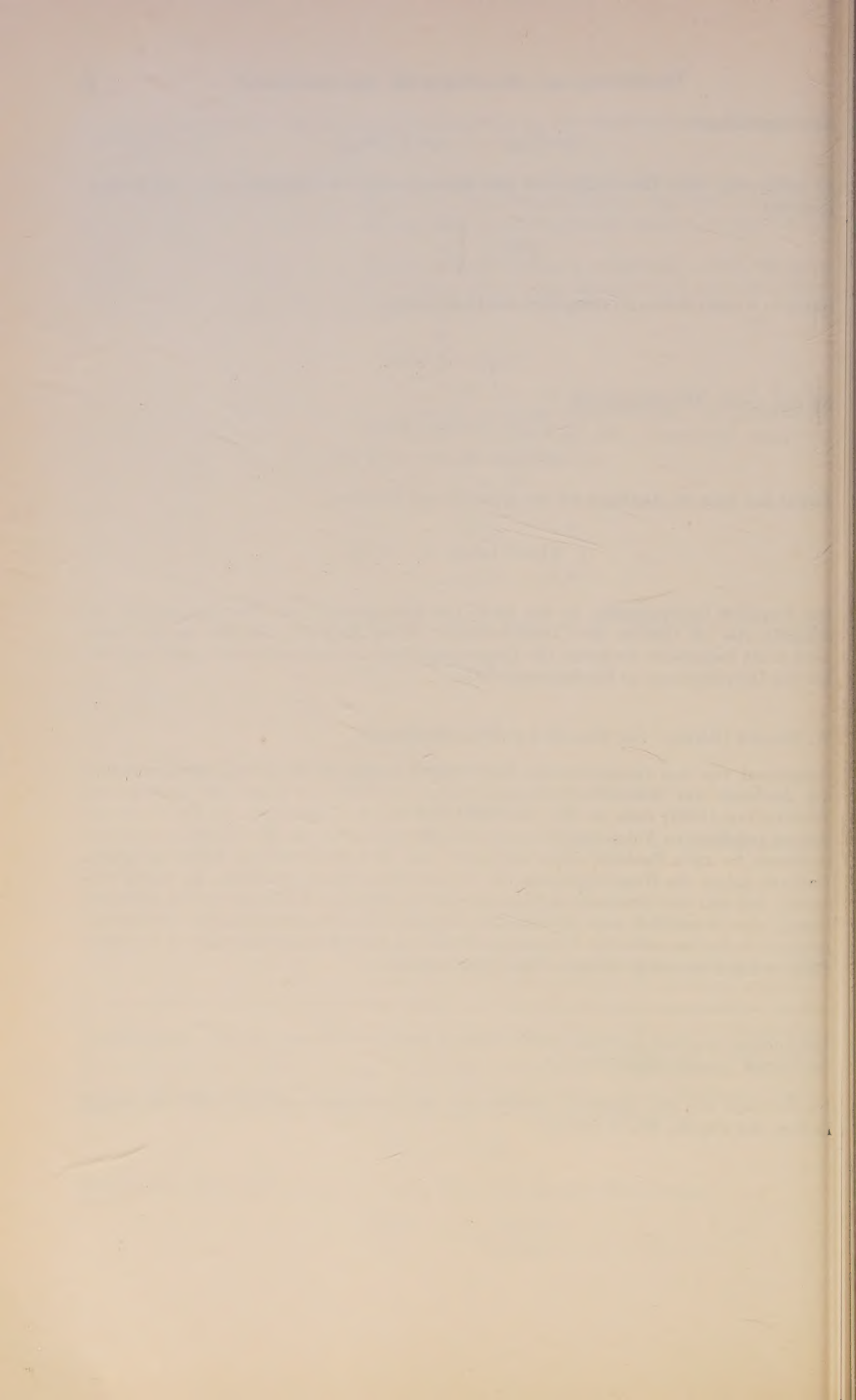
Die formalen Rechenregeln, so wie sie in der Quantenmechanik benötigt werden, erscheinen also als Gesetze über Distributionen wieder. Es stellt sich also das bis heute noch nicht behandelte Problem, die Quantenmechanik so umzuschreiben, daß unmittelbar die Distributionen in Erscheinung treten.

W. BRAUER (Berlin): Zur Theorie der Sekundäremission.

Ausgehend von den fundamentalen Erfahrungen bezüglich des Energiespektrums und der Ausbeute der Sekundärelektronenemission von Metallen wurde die Theorie von WOOLDRIDGE (1939) kurz in den wesentlichen Punkten vorgetragen. An Hand der vor kurzem publizierten Noten von BARODY und MARSHALL wurden WOOLDRIDGES Approximationen in zwei Punkten näher analysiert und dort offensichtliche Fehler gefunden. Dadurch gehen die Hauptergebnisse der WOOLDRIDGE-Theorie verloren. Es wurde vermutet, daß sich eine einwandfreie Theorie durch sorgfältigere Rechnungen wird aufstellen lassen, ohne wesentlich neue physikalische Aspekte in den Problembereich hineinbringen zu müssen. Außerdem sollte der Vorgang der Diffusion der Sekundärelektronen an die Oberfläche weniger pauschal als bisher berechnet werden.

Der Vortrag von Prof. L. INFELD wird (in etwas erweiterter Fassung) in den „Fortschritten der Physik“ veröffentlicht werden.

Die Vorträge von Prof. JÁNOSSY stützten sich im wesentlichen auf die Veröffentlichungen in Ann. der Physik, Bd. 11 (1953).



Soeben erschienen

PROF. DR. PANCONCELLI-CALZIA

DIE TASCHENBANDSTIMME

(*Dysphonia plicarum ventricularium*)

Es fehlte bis heute ein Werk, in dem die Taschenbandstimme gleichzeitig praktisch, theoretisch und geschichtlich dargestellt war. Durch vorliegende Monographie wird diese Lücke ausgefüllt. Die Arbeit beruht wohl auf wissenschaftlicher Grundlage, ist aber in verständlicher Form gehalten und räumt der Behandlung einen ansehnlichen Platz ein. — Die Übungsbehandlung beruht in der Hauptsache auf Fausts „Aktiver Entspannungstherapie“. Auch Réthis medikamentöse und operative Behandlung wird ausführlich beschrieben, denn es hat sich herausgestellt, daß diese Art der Bekämpfung der Taschenbandstimme in den meisten (auch refraktären) Fällen blitzartig zu einer Normalisierung der Stimme führt. — Der Theoretiker wird im zweiten Teil zahlreiche Fragen (u. a. „Wie können die Taschenbänder überhaupt stimmerzeugend auftreten?“, „Schwingungsmodus der Taschenbänder“) erörtert finden, die ihn zu weiteren Forschungen anregen werden. — Im dritten Teil wird gezeigt, wie alt die Lehre der Taschenbandstimme ist und wann eine rationelle Therapie dieser Stimmstörung aufgetreten ist. Jeder, der sich mit Stimmstörungen und Stimmerziehung beschäftigt, wird aus dieser Monographie Gewinn ziehen.

VII und 55 Seiten — 24 Abbildungen — 7 Tafeln — 1953

in Halbleinen DM 12,—

Bestellungen an eine Buchhandlung erbeten

AKADEMIE · VERLAG · BERLIN NW 7

FASERFORSCHUNG UND TEXTILTECHNIK

Wissenschaftlich-technische Zeitschrift
für die Textilindustrie

Herausgegeben von

PROF. DR. ERICH CORRENS
PROF. DR.-ING. WALTER FRENZEL

Die Zeitschrift behandelt das gesamte Gebiet der Faserforschung und Textiltechnik und soll vor allem die Verbindung zwischen Wissenschaft und Praxis herstellen. Sie enthält neben Berichten und Mitteilungen des Instituts für Textiltechnik und des Instituts für Farben- und Textilechemie der Technischen Hochschule Dresden sowie verwandter Hochschulinstitute Ergebnisse werkseigener Forschung der Industrie. Darüber hinaus kommen auch Fachleute der Textilindustrie nahestehender Industriezweige zu Worte. Die beiden Institute der Akademie der Wissenschaften zu Berlin — das Institut für Faserforschung in Teltow-Seehof und das Institut für Technologie der Fasern in Pirna-Copitz — benutzen die Zeitschrift als ihr Organ für die Veröffentlichung ihrer Forschungsergebnisse.

Bezugspreis je Heft DM 6,—
vierteljährlich DM 18,— (zuzügl. Porto)

Bestellungen an eine Buchhandlung erbeten

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN NW 7